

Nom, prénom :

ROC

2,5 points

Soit X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p (où n est le nombre épreuves, p la probabilité de succès à chaque épreuve et X le nombre de succès sur les n épreuves), alors pour tout entier k entre 0 et n , la probabilité obtenir k succès sur n épreuves est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Compléter la ligne ci-dessus puis la démontrer sur votre copie.

Soit k un nombre entier entre 0 et n Sur chaque chemin menant à exactement k succès, on dénombre k fois la probabilité p et $(n - k)$ fois la probabilité $(1 - p)$

La probabilité associée à chaque chemin est donc $p^k (1 - p)^{n-k}$ Le nombre de chemins menant à k succès est égal à $\binom{n}{k}$

L'évènement " $X = k$ " est composé de $\binom{n}{k}$ issues élémentaires de probabilités $p^k (1 - p)^{n-k}$

En faisant la somme des probabilités de toutes les issues, on obtient :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Exercice 1

5 points

On joue à un jeu où la probabilité de gagner une partie est 0,45.

On fait 40 parties successives, les parties sont identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées. Compléter toutes les cases du tableau ci-dessous :

1. Compléter toutes les cases du tableau ci-dessous :

Pour chaque calcul, on utilisera la calculatrice et on donnera directement la valeur arrondie au millièm du résultat sans expliquer dans le tableau ci-dessous :

La probabilité de gagner :	En langage mathématiques	résultat au millièm près
Exactement 25 parties	$P(X = 25)$	0,011
moins de 10 parties	$P(X \leq 10)$	0,07
Au moins 15 parties	$P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14)$	0,867
Entre 10 et 20 parties (10 et 20 inclus)	$P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9)$	0,784

2. Est-il vrai qu'en moyenne on perd 22 fois? Justifier

$$E(X) = np = 40 \times 0,45 = 18$$

En moyenne on gagne 18 fois donc on perd en moyenne 22 fois

La phrase est donc vraie

Exercice 2

12,5 points

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

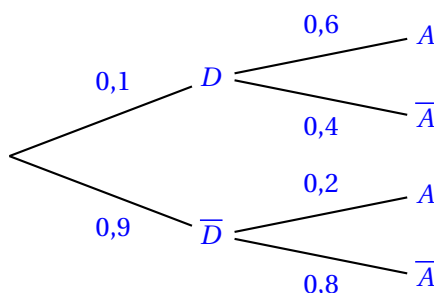
- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie 1

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

- D l'évènement « le candidat a été sélectionné sur dossier »;
- A l'évènement « le candidat a été admis à l'école »;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les évènements contraires des évènements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

On a $P(D \cap A) = P(D) \times P_D(A) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,24.

On a de même $P(\overline{D} \cap A) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A) = 0,9 \times 0,2 = 0,18$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(A) = P(D \cap A) + P(\overline{D} \cap A) = 0,06 + 0,18 = 0,24.$$

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

$$\text{On a } P_A(\overline{D}) = \frac{P(\overline{D} \cap A)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Partie 2

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.

On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

- a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

Les paramètres de cette loi sont $n = 7$ et $p = 0,24$.

- b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

On a $P(X = 1) = \binom{7}{1} \times 0,24 \times (1 - 0,24)^{7-1} = 7 \times 0,24 \times 0,76^6 \approx 0,324$ soit environ 0,32 au centième près.

- c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

On a $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0,146 - 0,324$ soit environ 0,53.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

- a. Donner l'expression, en fonction de n , de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

On a $P_n = 0,24^0 \times 0,76^n = 0,76^n$.

- b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99?

La probabilité d'avoir au moins un candidat reçu est $1 - P_n = 1 - 0,76^n$.

Il faut donc résoudre $1 - 0,76^n \geq 0,99 \iff 1 - 0,99 \geq 0,76^n$ ou $0,01 \geq 0,76^n$, en utilisant la table de la calculatrice on trouve que le plus petit entier n tel que $0,76^n \leq 0,01$ est 17 car $0,76^{16} \approx 0,0124$ et .

$0,76^{17} \approx 0,0094$

Il faut donc présenter au moins 17 candidats.