

EXERCICE 1

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$.

Initialisation : $T_0 = 180 \geq 20$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Supposons que $T_n \geq 0$, pour un entier n donné.

Montrons que $T_{n+1} \geq 20$.

$$T_n \geq 20 \iff 0,955 \times T_n \geq 0,955 \times 20 \iff 0,955T_n \geq 19,1$$

$$\iff 0,955T_n + 0,9 \geq 19,1 + 0,9 \iff 0,955T_n + 0,9 \geq 20.$$

Donc $T_{n+1} \geq 20$. L'hérédité est démontrée.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Donc d'après le principe de récurrence, on a $T_n \geq 20$ pour tout entier n .

$$\begin{aligned} \text{(b) } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n &= 0,955T_n + 0,9 - T_n \\ &= -0,045T_n + 0,9 \\ &= -0,045 \left(T_n - \frac{0,9}{0,045} \right) \\ &= -0,045(T_n - 20). \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$ donc $T_n - 20 \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \leq 0$.

La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$.

$$\begin{aligned} \text{(a) } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= T_{n+1} - 20 \\ &= 0,955T_n + 0,9 - 20 \\ &= 0,955T_n - 19,1 \\ &= 0,955 \left(T_n - \frac{19,1}{0,955} \right) \\ &= 0,955(T_n - 20) \\ &= 0,955u_n. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

$$\text{(b) } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n.$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$

donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

$$\text{(c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,955^n = 0 \text{ car } 0,955 \in]-1; 1[. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 20.$$

$$\begin{aligned} \text{(d) } T_n \leq 120 &\iff 160 \times 0,955^n + 20 \leq 120 \\ &\iff 160 \times 0,955^n \leq 120 - 20 \\ &\iff 160 \times 0,955^n \leq 100 \\ &\iff 0,955^n \leq \frac{100}{160} \\ &\iff 0,955^n \leq \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

À la calculatrice, on trouve $n \geq 11$.

3. (a) Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

- (b)

```
def temp(x):
    T = 180
    n = 0
    while T > x:
        T = 0.955 * T + 0.9
        n = n + 1
    return n
```

La fonction Python est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leq x$.

temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leq 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

EXERCICE 2

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x}{1 + e^x} - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{1 + e^x} = \frac{2e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x} \right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

Affirmation 1 : Vraie

$$2. g(x) = \frac{1}{2} \iff \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff 2e^x = e^x + 1 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

Affirmation 2 : Vraie

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 \times -e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}.$$

L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Pour que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathcal{C}$, il faut que la courbe $\mathcal{C}$ admette une tangente d'équation $y = 0$ (équation de l'axe des abscisses), donc il faut que $f(a) = 0$ et $f'(a) = 0$. Sachant que $\forall a \in \mathbb{R}, e^{-a} \neq 0$,

$$f(a) = 0 \iff a^2 e^{-a} = 0 \iff a^2 = 0 \iff a = 0.$$

$$f'(a) = 0 \iff (2a - a^2)e^{-a} = 0 \iff 2a - a^2 = 0 \iff a(2 - a) = 0 \iff a = 0 \text{ ou } a = 2.$$

Donc $a = 0$. Il n'existe donc qu'un seul point où l'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}$.

Affirmation 3 : Vraie

4. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = e^x \times (1 - x^2) + e^x \times -2x = e^x (1 - x^2 - 2x) = (-x^2 - 2x + 1) e^x.$$

La fonction h' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, h''(x) = (-2x - 2)e^x + e^x \times (-x^2 - 2x + 1) = e^x (-2x - 2 - x^2 - 2x + 1) = (-x^2 - 4x - 1) e^x$$

Si $\mathcal{C}_h$ admet des points d'inflexions, alors $h''(x)$ peut s'annuler et changer de signe. Or $e^x > 0$ pour tout réel x , donc étudions le signe de $-x^2 - 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

$-x^2 - 4x - 1$ s'annule pour $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et pour $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ car $\Delta = 12$.

Le trinôme du second degré s'annule donc deux fois et change donc aussi de signe.

Affirmation 4 : Fausse

5. $1 + e^{2x} \geq 2e^x \iff e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0 \iff (e^x - 1)^2 \geq 0.$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x .

Affirmation 5 : Vraie

131 $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

a. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles

b. Les droites sont-elles coplanaires ? (les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?)

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont coplanaires si

il existe des réels x et y tels que :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 3x \\ 2 = -2x - 2y \\ 5 = 7x + 5y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ 5 = 21 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution donc les droites sont non coplanaires, elles ne sont donc pas sécantes.

132 On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{ME}$ et $\overrightarrow{ML}$ dans une la base, par exemple, dans la base $(\overrightarrow{NH}; \overrightarrow{NO}; \overrightarrow{NJ})$ de l'espace

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{NO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{NO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ON} + \frac{1}{3}\overrightarrow{NJ}$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{NO} - \frac{1}{6}\overrightarrow{NJ}$$

$$\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{NO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{NO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ON} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NH}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{NH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NO} - \frac{1}{2}\overrightarrow{NJ}$$

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NH}$$

Dans la base $(\overrightarrow{NH}; \overrightarrow{NO}; \overrightarrow{NJ})$: $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix};$

$\overrightarrow{ME} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ sont coplanaires si il existe des

réels x et y tels que :
$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Ce système a une solution donc les points sont coplanaires.