

Exercice 1

12 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .

$$u_1 = f(u_0) = f(3) = \frac{2+9}{4+3} = \frac{11}{7}$$

2. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python,
« `i in range (n)` » signifie que
`i` varie de 0 à `n - 1`.

```
def  fonc(n) :
    u=-1
    for i in range(n) :
        u=(2+3*u)/(4+u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3} .

On a $fonc(2) = u_2 = f(u_1) \approx 1,205$.

3. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.

La fonction f est définie et dérivable sur $[0; 4]$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

Pour tout réel x de $[0; 4]$:

$$f'(x) = \frac{3(4+x) - 1(2+3x)}{(4+x)^2} = \frac{12+3x-2-3x}{(4+x)^2} = \frac{10}{(4+x)^2}$$

$f'(x) > 0$ comme quotient de nombres positifs.

La fonction f est donc croissante sur $[0; 4]$

4. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

Posons pour n entier naturel, P_n : « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ »

Initialisation : avec $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{11}{7} \approx 1,57$, on a bien : $1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$

donc P_0 est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

Supposons que P_n est vraie, c'est à dire : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

Montrons que P_{n+1} est vraie c'est à dire : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$.

On a par hypothèse de récurrence que $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.

On a vu que sur l'intervalle $[0; 4]$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$

Or $f(1) = \frac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \frac{11}{7} \leq 3$

On a donc : $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 3$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire donc pour tout entier naturel n , P_n est vraie, c'est à dire :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

5. a. En déduire que la suite (u_n) est convergente

D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc convergente

- b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer ℓ .

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}.$$

On en déduit que $\ell(4+\ell) = 2+3\ell \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$.

Or $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :

$$\ell_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ et } \ell_2 = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

Comme $\ell \in [1; 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Conclusion $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Conjecturer avec la table de la calculatrice le sens de variation et la limite de la suite (v_n)

NORMAL FLOTT AUTO REEL RAD MP APP SUR POUR MODIF FONCTION				
n	u			
0	0.1			
1	0.951			
2	0.9875			
3	0.9999			
4	0.9999			
5	0.9999			
6	0.9999			
7	0.9999			
8	0.9999			
9	0.9999			
10	0.9999			

$$u(1) = \frac{23}{41}$$

La suite semble croissante et converger vers 1.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4 + v_n} \right) (1 - v_n).$$

$$\forall n \in \mathbb{N},$$

$$1 - v_{n+1} = 1 - \frac{2+3v_n}{4+v_n} = \frac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \frac{2-2v_n}{4+v_n} = \frac{2}{4+v_n} (1 - v_n).$$

- b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Posons pour n entier naturel, P_n : « $0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ».

Initialisation :

$$v_0 = 0,1 \text{ donc } 1 - v_0 = 0,9$$

$$\text{On a bien } 0 \leq 1 - v_0 \leq \left(\frac{1}{2} \right)^0.$$

Hérédité :

Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a $1 - v_{n+1} = \frac{2}{4 + v_n} (1 - v_n)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

$$1 - v_{n+1} \leq \frac{2}{4 + v_n} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\text{Or } 0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 0$$

Il suit que $4 + v_n \geq 4$, donc en prenant les inverses $0 \leq \frac{1}{4 + v_n} \leq \frac{1}{4}$.

On a donc $0 \leq 1 - v_{n+1} \leq 2 \times \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :

$$0 \leq 1 - v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} : P_{n+1} \text{ est vraie.}$$

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire donc pour tout entier naturel n , P_n est vraie, c'est à dire :

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle? Si oui, préciser sa limite.

Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$,

En utilisant l'encadrement trouvé à la question précédente, le théorème des gendarmes permet de conclure :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1.$$

Exercice 2

8 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 1]$ par

$$f(x) = (2 - x^2)e^x.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f . Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5; 1]$, $f'(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^x$.

f est dérivable sur $[-5; 1]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel x de $[-5; 1]$:

$$f'(x) = -2xe^x + (2 - x^2)e^x$$

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^x$$

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-5; 1]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(2) = 12 > 0$$

$$x_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} - 1 \text{ et } x_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} - 1$$

Pour tout réel x de $[-5; 1]$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines

$$f(-5) = (2 - 5^2)e^{-5} = -23e^{-5}$$

$$f(-\sqrt{3} - 1) = (2 - (-\sqrt{3} - 1)^2)e^{-\sqrt{3}-1} = (-2\sqrt{3} - 2)e^{-\sqrt{3}-1}$$

$$f(\sqrt{3} - 1) = (2 - (\sqrt{3} - 1)^2)e^{\sqrt{3}-1} = (2\sqrt{3} - 2)e^{\sqrt{3}-1}$$

$$f(1) = (2 - 1^2)e^1 = e$$

D'où le tableau de variations de la fonction f .

x	-5	$-\sqrt{3}-1$	$\sqrt{3}-1$	1	
signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-
Variations de f	$-23e^{-5}$		$(2\sqrt{3}-2)e^{\sqrt{3}-1}$		e
		$(-2\sqrt{3}-2)e^{-\sqrt{3}-1}$			

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[-5; 1]$ par

$$F(x) = x(2-x)e^x.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $[-5; 1]$.

F est dérivable sur $[-5; 1]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.

Pour montrer que F est une primitive de f sur $[-5; 1]$, on dérive F :

Pour tout réel x de $[-5; 1]$,

$$F'(x) = (2-2x)e^x + (2x-x^2)e^x = e^x(2-2x+2x-x^2) = (2-x^2)e^x = f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $[-5; 1]$

4. a. Étudier la convexité de la fonction f sur $[-5; 1]$.

La fonction f' est dérivable sur $[-5; 1]$, comme produit de fonctions dérivables.

Pour tout réel x de $[-5; 1]$:

$$f''(x) = (-2x-2)e^x + (-x^2-2x+2)e^x = e^x(-2x-2-x^2-2x+2) = -x(x+4)e^x$$

$f''(x)$ est du signe de $-x(x+4)$ qui s'annule en -4 et en 0

On obtient donc :

x	0	-4	0	1	
Signe de $f''(x)$	-	0	+	0	-
Convexité de f	concave		convexe		concave

- b. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède deux points d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

La dérivée seconde s'annule et change de signe -4 et en 0 . Donc la courbe de f admet deux points d'inflexion A et B d'abscisse respective -4 et 0

$$f(-4) = (2-4^2)e^{-4} = -14e^{-4}$$

$$f(0) = (2-0^2)e^0 = 2$$

Les deux points d'inflexion de la courbe de f sont $A(-4; -14e^{-4})$ et $B(0; 2)$