

Exercice 1**12 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .
2. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python,
«`i in range (n)`» signifie que
`i` varie de 0 à `n - 1`.

```
def  fonc(n) :
    u=-1
    for i in range(n) :
        u=(2+3*u)/(4+u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3} .

3. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
4. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

5. **a.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
b. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer ℓ .

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

1. Conjecturer avec la table de la calculatrice le sens de variation et la limite de la suite (v_n)
2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4 + v_n} \right) (1 - v_n).$$

- b.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle? Si oui, préciser sa limite.

Exercice 2**8 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-5; 1]$ par

$$f(x) = (2 - x^2)e^x.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f .

Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5; 1]$,

$$f'(x) = (-x^2 - 2x + 2)e^x.$$

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-5; 1]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[-5; 1]$ par

$$F(x) = x(2 - x)e^x.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $[-5; 1]$.

4. a. Étudier la convexité de la fonction f sur $[-5; 1]$.
- b. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède deux points d'inflexion dont on précisera les coordonnées.