

Correction – Interrogation n°6 – Sujet A

Calculatrice autorisée

Exercice 1 : 4 points

Dans chaque cas, déterminer (en justifiant) les limites :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3+x^2+1}$ et b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{-2x^2+8}{x-3}$

a. 2 pts

$$x^3 + x^2 + 1 = x^3 \left(1 + \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) = x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = 1$$

$$\text{donc par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^X = 0.$$

$$\text{Ainsi, par composition, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3+x^2+1} = 0.$$

b. 2 pts

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (-2x^2 + 8) = -2 \times 3^2 + 8 = -18 + 8 = -10$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (x - 3) = 0^- \quad \text{car } x < 3 \text{ donc } x - 3 < 0$$

$$\text{Ainsi, par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{-2x^2+8}{x-3} = +\infty.$$

Exercice 2 : 6 points

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x} + 2$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.

- En développant l'expression de f , on obtient :

$$f(x) = x^2 e^{-x} - 3e^{-x} + 2 = \frac{x^2}{e^x} - \frac{3}{e^x} + 2 = \frac{1}{\frac{x^2}{e^x}} - \frac{3}{e^x} + 2$$

$$\text{Par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\text{Ainsi, par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2. \quad \text{1 pt}$$

- La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. 0,5 pt

Alternative :

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \left(1 - \frac{3}{x^2} \right) + 2 \quad \text{puis poursuivre comme précédemment.}$$

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$\text{Ainsi, par produit puis par somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty. \quad \text{0,75 pt}$$

2. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

$$f(x) = u(x) \times v(x) + 2$$

$$\text{où } \left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 - 3 \quad \text{et} \quad v(x) = e^{-x} \quad (\text{c'est une composition}) \\ u'(x) = 2x \quad \quad \quad v'(x) = -e^{-x} \end{array} \right|$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) + 0 \\ &= 2xe^{-x} + (-e^{-x}) \times (x^2 - 3) \\ &= e^{-x}(2x - (x^2 - 3)) \\ &= e^{-x}(-x^2 + 2x + 3) \end{aligned}$$

1 pt

b. Dresser le tableau de variations (complet) de la fonction f .

Etudions le signe de $f'(x)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

$f'(x)$ est donc strictement du même signe que $-x^2 + 2x + 3$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = 4 + 12 = 16$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $-x^2 + 2x + 3$ admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ & \\ & = \frac{-2 + 4}{-2} \\ & = -1 \\ & \\ & = 3 \end{array}$$

1 pt

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variations de f	$+\infty$ $f(-1)$ $f(3)$ 2				

car $a = -1$ est négatif

1 pt

$$\text{où } f(-1) = ((-1)^2 - 3)e^{-(-1)} + 2 = -2e + 2 \simeq -3,4$$

$$\text{et } f(3) = (3^2 - 3)e^{-3} + 2 = \frac{6}{e^3} + 2 \simeq 2,3$$

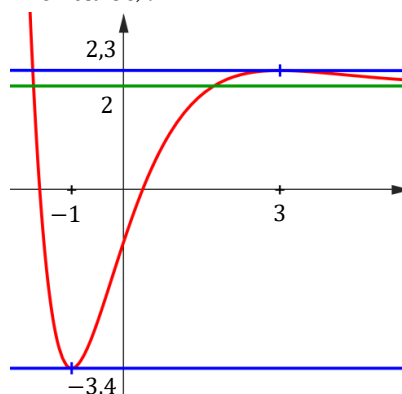
c. A partir du tableau de variations, tracer l'allure de la courbe de la fonction f (faire apparaître l'asymptote et les éventuelles tangentes horizontales).

0,75 pt

En rouge : courbe de f

En vert : asymptote

En bleu : tangentes horizontales



Correction – Interrogation n°6 – Sujet B

Calculatrice autorisée

Exercice 1 : 4 points

Dans chaque cas, déterminer (en justifiant) les limites :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^4+x+1}$ et b. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-x^3 + 5}{2 - x}$

a. 2 pts

$$x^4 + x + 1 = x^4 \left(1 + \frac{x}{x^4} + \frac{1}{x^4} \right) = x^4 \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = 1$$

$$\text{donc par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(1 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) = +\infty$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

$$\text{Ainsi, par composition, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^4+x+1} = +\infty.$$

b. 2 pts

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (-x^3 + 5) = -2^3 + 5 = -8 + 5 = -3$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (2 - x) = 0^+ \quad \text{car } x < 2 \text{ donc } 0 < 2 - x \text{ i.e. } 2 - x > 0$$

$$\text{Ainsi, par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{-x^3 + 5}{2 - x} = -\infty.$$

Exercice 2 : 6 points

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter ce résultat graphiquement.

- En développant l'expression de f , on obtient :

$$f(x) = x^2 e^{-x} - 4x e^{-x} + e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} - 4 \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} - \frac{4}{\frac{e^x}{x}} + \frac{1}{e^x}$$

$$\text{Par croissance comparée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\text{Ainsi, par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \quad \text{1 pt}$$

- La droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. 0,5 pt

Alternative :

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \text{ puis poursuivre comme précédemment.}$$

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x + 1) = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x + 1) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$$

$$\text{Ainsi, par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty. \quad \text{0,75 pt}$$

2. a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = (-x^2 + 6x - 5)e^{-x}$.

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

$$\text{où } \left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \text{et} \\ u'(x) = 2x - 4 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v(x) = e^{-x} \quad (\text{c'est une composition}) \\ v'(x) = -e^{-x} \end{array} \right|$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= (2x - 4)e^{-x} + (-e^{-x}) \times (x^2 - 4x + 1) \\ &= e^{-x}(2x - 4 - (x^2 - 4x + 1)) \\ &= e^{-x}(2x - 4 - x^2 + 4x - 1) \\ &= e^{-x}(-x^2 + 6x - 5) \end{aligned}$$

1 pt

b. Dresser le tableau de variations (complet) de la fonction f .

Étudions le signe de $f'(x)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

$f'(x)$ est donc strictement du même signe que $-x^2 + 6x - 5$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 36 - 20 = 16$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $-x^2 + 2x + 3$ admet deux racines :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} & = \frac{-6 + 4}{-2} \\ = \frac{-6 - 4}{-2} & = 1 \\ = 5 & \end{array}$$

1 pt

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$ $f(1)$ $\nearrow$ $f(5)$ $\searrow$ 0				

car $a = -1$ est négatif

1 pt

$$\text{où } f(1) = (1^2 - 4 \times 1 + 1)e^{-1} = -\frac{2}{e} \simeq -0,74$$

$$\text{et } f(5) = (5^2 - 4 \times 5 + 1)e^{-5} = \frac{6}{e^5} \simeq 0,04$$

c. A partir du tableau de variations, tracer l'allure de la courbe de la fonction f (faire apparaître l'asymptote et les éventuelles tangentes horizontales).

0,75 pt

En rouge : courbe de f

En vert : asymptote (axe des abscisses)

En bleu : tangentes horizontales

