

## Correction exercice 1

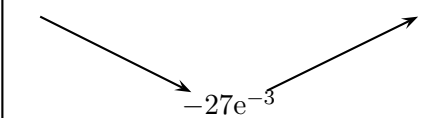
1. On définit la suite  $(u_n)$  par  $u_0 = -1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- a. •  $u_1 = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368$  ;  
 •  $u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3} \times (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034$ .

b. On a  $\text{fonc}(2) = u_2 \approx -0,034$ .

2. a.  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  :  
 $\forall x \in \mathbb{R}$  ,  $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$ .

b.

| $x$ | $-\infty$                                                                          | $-3$ | $+\infty$ |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------|------|-----------|
| $f$ |  |      |           |

• Quel que soit le réel  $x$ ,  $x^2 \geq 0$  et  $e^x > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $3 + x$  qui s'annule pour  $x = -3$ , d'où les deux intervalles de variations ;

$3 + x < 0 \iff x < -3$  : sur  $] -\infty ; -3[$ ,  $f'(x) < 0$  : la fonction  $f$  est donc décroissante sur  $] -\infty ; -3[$  ;

$3 + x > 0 \iff x > -3$  : sur  $] -3 ; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$  : la fonction  $f$  est donc croissante sur  $] -3 ; +\infty[$  ;

$f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$  est le minimum de la fonction sur  $\mathbb{R}$ .

c. Posons pour  $n$  entier naturel,  $P_n$  : «  $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$  »

*Initialisation* : avec  $u_0 = -1$  et  $u_1 \approx -0,368$ , on a bien :  $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 0$

donc  $P_0$  est vraie

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé quelconque.

Supposons que  $P_n$  est vraie , c'est à dire :  $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$ .

Montrons que  $P_{n+1}$  est vraie c'est à dire :  $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0$ .

On a par hypothèse de récurrence que  $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$ .

On a vu que sur l'intervalle  $] -3 ; +\infty[$ , donc a fortiori sur l'intervalle  $] -1 ; 0[$ , la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de  $f$  :  $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$ , ou encore :

$$u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$$

et comme  $u_1 \approx -0,338$ ,  $-1 \leq u_1$  et  $f(0) = 0$ , on a bien :

$$-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0.$$

Donc  $P_{n+1}$  est vraie.

Conclusion :  $P_n$  est vraie au rang 0, elle est héréditaire donc pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n$  est vraie, c'est à dire :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0.$$

d. La question précédente montre que :

- la suite  $(u_n)$  est croissante ;
- la suite  $(u_n)$  est majorée par 0 ;

La suite  $(u_n)$  est donc convergente vers une limite  $\ell$ , avec  $\ell \leq 0$ .

- e. On résout dans  $] -1 ; 0[$ , (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

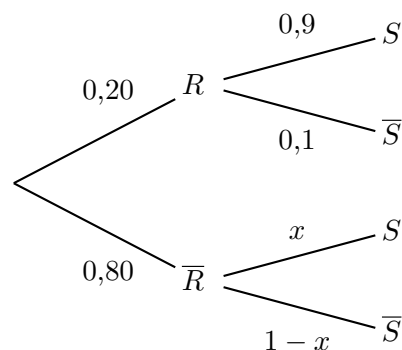
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^3 e^x = x \\ &\iff x^3 e^x - x = 0 \\ &\iff x(x^2 e^x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

car on admet que l'équation  $x^2 e^x - 1 = 0$  n'a pas de solution dans l'intervalle  $] -1 ; 0[$ .

Conclusion  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

## Correction exercice 2

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.



2.  $R$  et  $\bar{R}$  forment une partition de l'univers.

Donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$  Or :

- $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$  et
- $P(\bar{R} \cap S) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,8 \times x = 0,8x$  et comme  $P(S) = 0,82$ , on a donc l'équation :  
 $0,18 + 0,8x = 0,82 \iff 0,8x = 0,64 \iff x = 0,8$ .

3. On choisit un client satisfait de son achat.

Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?

Il faut calculer  $P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{18}{82} = \frac{9}{41} \approx 0,219$ , soit 0,22 au centième près.

## Correction exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  par  $f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2$ .

1. On désigne par  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ .

La fonction  $f$  est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

Pour tout  $x$  de  $[0 ; 4]$  :  $f'(x) = 3e^{-x} + (3x - 4)(-1)e^{-x} = (3 - 3x + 4)e^{-x} = (7 - 3x)e^{-x}$

2.  $f'(x) = (7 - 3x)e^{-x}$ ; or, pour tout  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $7 - 3x$ , donc s'annule et change de signe pour  $x = \frac{7}{3}$ .

On calcule :  $f(0) = -2$ ;  $f\left(\frac{7}{3}\right) = 3e^{-\frac{7}{3}} + 2$  et  $f(4) = 8e^{-4} + 2$

D'où le tableau de variations de la fonction  $f$  :

| $x$     | 0  | $\frac{7}{3}$           | 4             |
|---------|----|-------------------------|---------------|
| $f'(x)$ | +  | 0                       | -             |
| $f(x)$  | -2 | $3e^{-\frac{7}{3}} + 2$ | $8e^{-4} + 2$ |

3. On considère la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  par  $F(x) = (1 - 3x)e^{-x} + 2x$ .

$F$  est dérivable sur  $[0 ; 4]$  comme somme, produit et composées de fonctions dérivables sur  $[0 ; 4]$ .

Pour montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0 ; 4]$ , on dérive la fonction  $F$  :

$F'(x) = -3e^{-x} + (1 - 3x)(-1)e^{-x} + 2 = (-3 - 1 + 3x)e^{-x} + 2 = (3x - 4)e^{-x} + 2 = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[0 ; 4]$ .

4. a fonction  $f$  est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $[0 ; 4]$ . Pour tout  $x$  de  $[0 ; 4]$  :

$$f''(x) = (3x - 10)e^{-x}.$$

5. L'intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe est l'intervalle sur lequel la dérivée seconde  $f''$  est positive ou nulle.

$f''(x) = (3x - 10)e^{-x}$ ; or  $e^{-x} > 0$  pour tout  $x$  donc  $f''$  est du signe de  $3x - 10$ .

$$3x - 10 \geq 0 \iff 3x \geq 10 \iff x \geq \frac{10}{3} \iff x \in \left[\frac{10}{3}; 4\right]$$

La fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $\left[\frac{10}{3}; 4\right]$ .

6. La courbe représentant  $f$  admet un point d'inflexion lorsque sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe donc pour  $x = \frac{10}{3}$ .