

DS 1 - TG - ext 23 - Suites

Exercice 1: $u_m = 4m^2 - 8m + 1 \quad m \in \mathbb{N}$

1) a) $4(m-1)^2 - 3 = 4(m^2 - 2m + 1) - 3$
 $= 4m^2 - 8m + 1 = u_m$

b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 4(n-1)^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (-3) = -3 \end{array} \right\} \text{Par somme} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_m = +\infty$

2) pour $m \geq 1 \quad u_m = 4m^2 \left(1 - \frac{2}{m} + \frac{1}{4m^2}\right)$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{m}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n^2} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \text{par somme} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) = 1$

Où $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4m^2 = +\infty$ par produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_m) = +\infty$

3a) Exprimons $u_m - 2n^2$ en fonction de m puis étudions son signe :

$u_m - 2m^2 = 4m^2 - 8m + 1 - 2m^2 = 2m^2 - 8m + 1$

$\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 1 = 56 \quad \Delta > 0 \quad 2 \text{ racines}$

$m_1 = \frac{8 - \sqrt{56}}{4} = 2 - \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 0,13$

$m_2 = \frac{8 + \sqrt{56}}{4} = 2 + \frac{\sqrt{14}}{2} \approx 3,87$

m	0	m_1	m_2
$u_m - 2m^2$	+	-	+

pour $m \geq 4 \quad u_m - 2m^2 > 0$
 $(\Leftrightarrow) u_m > 2m^2$

Remarque : une démonstration par récurrence était possible

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$, par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 2

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

$$u_0 = 2$$

$$u_1 = \frac{2}{3}u_0 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 \approx 2,33$$

$$u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 \approx 2,89$$

$$u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3} \times 2 + 1 \approx 3,59$$

$$u_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3} \times 3 + 1 \approx 4,40$$

- b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

La suite (u_n) semble être croissante.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq n + 3$.

Démontrons la propriété (P_n) : $u_n \leq n + 3$ par récurrence.

– Initialisation.

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 \leq 0 + 3 = 3$ la propriété est vraie au rang $n = 0$.

– Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n : $u_n \leq n + 3$.

Alors pour n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(n+3) + \frac{1}{3}n + 1$$

$$u_{n+1} \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1 = n + 3$$

$$u_{n+1} \leq (n+1) + 3 = n + 4$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

– Conclusion.

La propriété est vraie au rang 0. En la supposant vraie au rang n , elle est encore vraie au rang suivant.

Donc pour tout entier naturel n , $\boxed{u_n \leq n + 3}$.

- b. Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \right) - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(-u_n + n + 3)$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)}$$

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3 - u_n)$ et donc que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $(n+3 - u_n)$.

Or d'après la question 2a., $0 \leq (n+3 - u_n)$ et donc pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est bien croissante.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\ v_{n+1} &= \left(\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \right) - n - 1 \end{aligned}$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - n)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(v_n)$$

On a donc montré que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ et donc que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$, donc $v_n = v_0 \times q^n$ soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Puisque $u_n = v_n + n$ de la question précédente on peut exprimer u_n en fonction de n soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n + n$$

On sait que pour $-1 < q < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$ et $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \end{array} \right.$, de ce fait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

4. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n .

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{or} \quad u_n = v_n + n \text{ donc}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (v_k + k) \text{ et donc}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k + \sum_{k=0}^n k$$

Or

- La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ donc la somme des $(n+1)$ premiers termes est donnée par la formule :

$$\sum_{k=0}^n v_k = v_0 \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

- La somme des $(n+1)$ premiers entiers correspond à la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique (w_k) (avec $w_k = k$) de raison $r = 1$, soit :

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \sum_{k=0}^n v_k = v_0 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \\ \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \end{cases}$$

On a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 3 : $u_0 = 1$ $u_{m+1} = 2u_m - m + 3$
 $v_m = 2^m$

1) Soit P_m : " $u_m = 3 \times 2^m + m - 2$ " pour $m \in \mathbb{N}$

Montrons par récurrence que P_m est vraie pour $m \in \mathbb{N}$

Initialisation $u_0 = 3 - 2 = 1$ P_0 vraie

Hérédité

Soit m entier fixe, on suppose P_m vraie.

On veut montrer que P_{m+1} est vraie c. à d. que

$$u_{m+1} = 3 \times 2^{m+1} + m - 1$$

On sait que $u_{m+1} = 2u_m - m + 3$

$$\text{donc } u_{m+1} = 2 \times (3 \times 2^m + m - 2) - m + 3$$

$$u_{m+1} = 3 \times 2^{m+1} + 2m - 4 - m + 3$$

$$u_{m+1} = 3 \times 2^{m+1} + m - 1 \quad P_{m+1} \text{ vraie}$$

Conclusion : P_m est initialisé, P_m est héréditaire, selon le principe de récurrence, P_m est vrai pour tout m entier

$$2) \left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \times 2^n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (n-2) = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par somme } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

3) On sait que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ donc tout intervalle du type $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On est donc assuré de la condition d'arrêt de la boucle while.

Algo(6) renvoie le rang à partir duquel $u_n > 10^6$
Soit $n =$

$$4) \frac{u_n}{v_n} = \frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}$$

$$\text{Ainsi } \frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ à partir de } n \geq 4.$$

$$\text{Or on admet que } 0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 3$$

$$\text{D'après le théorème des gendarmes } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 3$$