

Devoir Maison (Facultatif)

Exercice 1.

Deux méthodes pour déterminer la limite d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

Partie A : première méthode

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_n + 2}$.
- 2) a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$
b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{u_n + 2}$ puis montrer que (u_n) est croissante.
- 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ
- 4) On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ avec f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$
 - a) Déterminer la valeur de ℓ
 - b) Écrire un algorithme déterminant la valeur N tel que : $\forall n > N, |u_n - \ell| < 10^{-3}$.
Donner la valeur de N à l'aide de la calculatrice.

Partie B : deuxième méthode

- 1) La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
- 2) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .
- 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 2.

On veut étudier les suites de termes positifs telles que $u_0 > 1$ et possédant la propriété suivante : pour tout $n > 0$, la somme des n premiers termes est égale au produit de ces termes.

On admet qu'une telle suite (u_n) existe. Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geq 0, u_n \geq 0$,
- pour tout $n > 0, u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

- 1) On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .

2) Pour $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.

3) L'algorithme suivant calcule le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a) Compléter l'algorithme.

b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

```
Saisir  $n, u$ 
 $s$  prend la valeur  $u$ 
pour  $i$  allant de 1 à  $n$  faire
    |  $u$  prend la valeur .....
    |  $s$  prend la valeur .....
fin
Afficher  $u$ 
```

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4) a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .