

Feuille de révisions Octobre 2023

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 e^x.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Calculer u_1 puis u_2 .

On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3} .

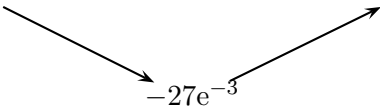
- b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python,
« `i in range(n)` » signifie que
`i` varie de 0 à `n - 1`.

```
def fonc(n) :  
    u=-1  
    for i in range(n) :  
        u=u*3*exp(u)  
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3} .

2. a. Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$.
b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f			

- c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0.$$

- d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- e. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer ℓ . (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$).

Exercice 2

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE.

On suppose que chaque client achète un seul matelas.

On dispose des informations suivantes :

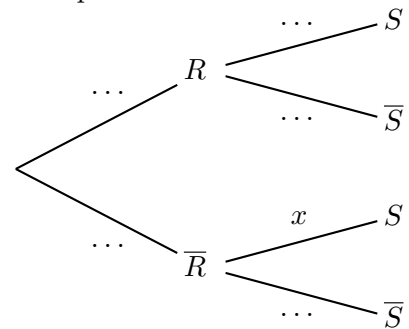
- 20 % des clients achètent un matelas RESSORTS.
Parmi eux, 90 % sont satisfaits de leur achat.
- 82 % des clients sont satisfaits de leur achat.

On choisit au hasard un client et on note les événements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\bar{R}}(S)$, où $P_{\bar{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. Démontrer que $x = 0,8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
On arrondira le résultat à 10^{-2} .



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2.$$

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f .
Montrer que l'on a, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 4]$,
 $f'(x) = (7 - 3x)e^{-x}$.
2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.
Toutes les valeurs du tableau seront données sous forme exacte.
3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$F(x) = (1 - 3x)e^{-x} + 2x.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $[0; 4]$.

4.
 - a. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
 - b. Montrer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.