

Correction exercice 1

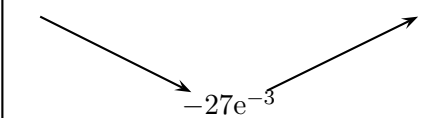
1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. • $u_1 = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368$;
 • $u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3} \times (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034$.

b. On a $\text{fonc}(2) = u_2 \approx -0,034$.

2. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$.

b.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f			

• Quel que soit le réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3 + x$ qui s'annule pour $x = -3$, d'où les deux intervalles de variations ;

$3 + x < 0 \iff x < -3$: sur $] -\infty ; -3[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $] -\infty ; -3[$;

$3 + x > 0 \iff x > -3$: sur $] -3 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $] -3 ; +\infty[$;

$f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

c. Posons pour n entier naturel, P_n : « $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$ »

Initialisation : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0,368$, on a bien : $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 0$

donc P_0 est vraie

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé quelconque.

Supposons que P_n est vraie , c'est à dire : $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

Montrons que P_{n+1} est vraie c'est à dire : $-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0$.

On a par hypothèse de récurrence que $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

On a vu que sur l'intervalle $] -3 ; +\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $] -1 ; 0[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, ou encore :

$$u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$$

et comme $u_1 \approx -0,338$, $-1 \leq u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :

$$-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0.$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire donc pour tout entier naturel n , P_n est vraie, c'est à dire :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0.$$

d. La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante ;
- la suite (u_n) est majorée par 0 ;

La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ , avec $\ell \leq 0$.

- e. On résout dans $] -1 ; 0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

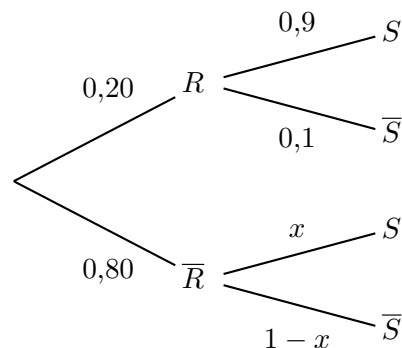
$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x^3 e^x = x \\ &\iff x^3 e^x - x = 0 \\ &\iff x(x^2 e^x - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

car on admet que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $] -1 ; 0[$.

Conclusion $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Correction exercice 2

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.



2. R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers.

Donc d'après la loi des probabilités totales :

$P(S) = P(R \cap S) + P(\bar{R} \cap S)$ Or :

- $P(R \cap S) = P(R) \times P_R(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$ et
- $P(\bar{R} \cap S) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(S) = 0,8 \times x = 0,8x$ et comme $P(S) = 0,82$, on a donc l'équation :
 $0,18 + 0,8x = 0,82 \iff 0,8x = 0,64 \iff x = 0,8$.

3. On choisit un client satisfait de son achat.

Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?

Il faut calculer $P_S(R) = \frac{P(S \cap R)}{P(S)} = \frac{0,18}{0,82} = \frac{18}{82} = \frac{9}{41} \approx 0,219$, soit 0,22 au centième près.

Correction exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $f(x) = (3x - 4)e^{-x} + 2$.

1. On désigne par f' la dérivée de la fonction f .

La fonction f est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

Pour tout x de $[0 ; 4]$: $f'(x) = 3e^{-x} + (3x - 4)(-1)e^{-x} = (3 - 3x + 4)e^{-x} = (7 - 3x)e^{-x}$

2. $f'(x) = (7 - 3x)e^{-x}$; or, pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $7 - 3x$, donc s'annule et change de signe pour $x = \frac{7}{3}$.

On calcule : $f(0) = -2$; $f\left(\frac{7}{3}\right) = 3e^{-\frac{7}{3}} + 2$ et $f(4) = 8e^{-4} + 2$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$\frac{7}{3}$	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-2	$3e^{-\frac{7}{3}} + 2$	$8e^{-4} + 2$

3. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par $F(x) = (1 - 3x)e^{-x} + 2x$.

F est dérivable sur $[0 ; 4]$ comme somme, produit et composées de fonctions dérivables sur $[0 ; 4]$.

Pour montrer que F est une primitive de f sur $[0 ; 4]$, on dérive la fonction F :

$F'(x) = -3e^{-x} + (1 - 3x)(-1)e^{-x} + 2 = (-3 - 1 + 3x)e^{-x} + 2 = (3x - 4)e^{-x} + 2 = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[0 ; 4]$.

4. a fonction f est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables sur $[0 ; 4]$. Pour tout x de $[0 ; 4]$:

$$f''(x) = (3x - 10)e^{-x}.$$

5. L'intervalle sur lequel la fonction f est convexe est l'intervalle sur lequel la dérivée seconde f'' est positive ou nulle.

$f''(x) = (3x - 10)e^{-x}$; or $e^{-x} > 0$ pour tout x donc f'' est du signe de $3x - 10$.

$$3x - 10 \geq 0 \iff 3x \geq 10 \iff x \geq \frac{10}{3} \iff x \in \left[\frac{10}{3}; 4\right]$$

La fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\frac{10}{3}; 4\right]$.

6. La courbe représentant f admet un point d'inflexion lorsque sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe donc pour $x = \frac{10}{3}$.