Contrôle commun n° 1

Terminale G
Octobre 2023

Nom, Prénom :

Le sujet est à rendre avec la copie

Exercice 1 — 7 points

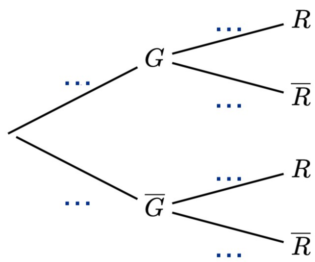
Un horticulteur propose à la vente des géraniums et des bégonias qui n'ont pas encore fleuri.
— 60 % de ces plantes sont des géraniums, les autres sont des bégonias ;
— 75 % des géraniums auront des fleurs rouges ;
— 48 % des bégonias auront des fleurs rouges.

Marie choisit au hasard une de ces plantes et l'achète. On admet que chaque plante a la même probabilité d'être choisie.

On définit les évènements suivants :
— G : « La plante choisie est un géranium » ;
— R : « La plante choisie aura des fleurs rouges ».
On note $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et $\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

1. Donner la probabilité que la plante choisie ait des fleurs rouges sachant que c'est un bégonia.

2. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



3. Calculer la probabilité de l'évènement $G \cap R$.

4. Montrer que la probabilité de l'évènement R est égale à 0,642.

5. Quelques jours plus tard, Marie constate que sa plante a des fleurs rouges.
Calculer la probabilité, arrondie au millième, que cette plante soit un géranium.

6. Les évènements G et R sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

7. **a.** Décrire par une phrase l'évènement $G \cup R$.
b. Calculer la probabilité de l'évènement $G \cup R$.

Exercice 2

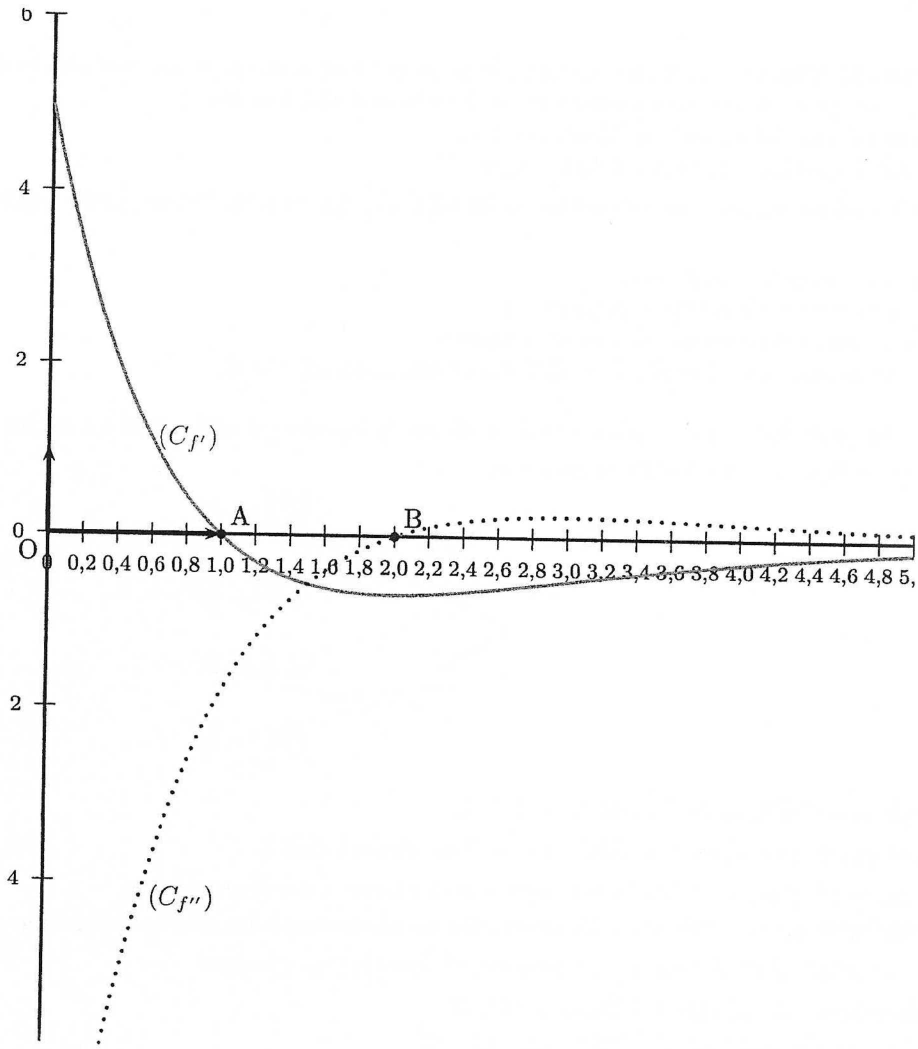
11 points

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

Partie A - À l'aide d'un graphique

On a représenté ci-dessous la courbe $(C_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(C_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

Le point A de coordonnées $(1\,;\,0)$ appartient à $(C_{f'})$ et le point B de coordonnées $(2\,;\,0)$ appartient à la courbe $(C_{f''})$.



1. Déterminer le sens de variation de la fonction f. Justifier.
2. Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier.
3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier. Si oui, préciser leur(s) abscisse(s).

Partie B - Étude de la fonction

La fonction f est définie sur $[0\,;\,5]$ par :

$$f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ et les éventuels points d'inflexion
3. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente, T à la courbe, (C_f), de f au point d'abscisse 3
   b. Étudier sur l'intervalle $]2\,;\,5]$ la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente T
4. Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,5]$ par $F(x) = (-5x-5)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;\,5]$.

Exercice 3

14 points

Partie A - Restitution Organisée de Connaissances

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_0
Démontrer que si limite $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n) = +\infty$

Partie B - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{-25}{2}$.

b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$.

c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots.. + u_n$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Partie C - Fonction Python

1. On considère la fonction Python, mystere, ci-dessous, qu'obtient-on si on saisit dans la console mystère(3) ?

```
def mystere(n):
    L=[1]
    for k in range(1,n):
        L.append((1/3)*L[k-1]+(k-1)-2)
    return L
```

2. **a.** Écrire, en Python, une fonction seuil(A) qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant A$ où u_n désigne le terme général de la suite définie à la partie B

b. Quel est le résultat obtenu pour seuil(20) ?

Exercice 4

8 points

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Justifier dans chaque cas. Toute trace de recherches même incomplètes sera valorisée

1. La suite (v_n) est bornée par 0 et 1.

2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

3. Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.

4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.