

Correction

Exercice 1

7 points

Un horticulteur propose à la vente des géraniums et des bégonias qui n'ont pas encore fleuri.

- 60 % de ces plantes sont des géraniums, les autres sont des bégonias ;
- 75 % des géraniums auront des fleurs rouges ;
- 48 % des bégonias auront des fleurs rouges.

Marie choisit au hasard une de ces plantes et l'achète. On admet que chaque plante a la même probabilité d'être choisie.

On définit les événements suivants :

- G : « La plante choisie est un géranium » ;
- R : « La plante choisie aura des fleurs rouges ».

On note $\bar{G}$ l'évènement contraire de G , et $\bar{R}$ l'évènement contraire de R .

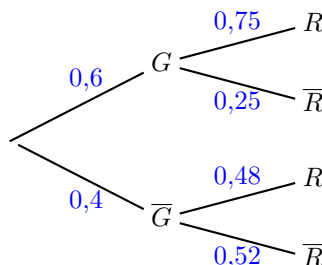
1. Donner la probabilité que la plante choisie ait des fleurs rouges sachant que c'est un bégonia.

0,5

La probabilité que la plante choisie ait des fleurs rouges sachant que c'est un bégonia est notée $P_{\bar{G}}(R)$
 $P_{\bar{G}}(R) = 0,48$ car 48 % des bégonias auront des fleurs rouges

2. Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :

1



3. Calculer la probabilité de l'évènement $G \cap R$.

0,5

$$P(G \cap R) = P(G) \times P_G(R) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$$

4. Montrer que la probabilité de l'évènement R est égale à 0,642.

1,5 dont 0,5 pour phrase

G et $\bar{G}$ forment une partition de l'univers, alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(G \cap R) + P(\bar{G} \cap R) \\ &= 0,45 + P(\bar{G}) \times P_{\bar{G}}(R) \\ &= 0,45 + 0,4 \times 0,48 \\ &= 0,45 + 0,192 \\ &= 0,642 \end{aligned}$$

La probabilité de l'évènement R est bien égale à 0,642.

5. Quelques jours plus tard, Marie constate que sa plante a des fleurs rouges. Calculer la probabilité, arrondie au millièm, que cette plante soit un géranium.

1

Calculons $P_R(G)$.

$$P_R(G) = \frac{P(G \cap R)}{P(R)} = \frac{0,45}{0,642} \approx 0,701.$$

la probabilité que la plante de Marie soit un géranium sachant qu'elle a des fleurs rouges est 0,701 au millièm près.

6. Les événements G et R sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

1

Les événements G et R sont indépendants si $P(G \cap R) = P(G) \times P(R)$.

$$P(G \cap R) = 0,45 \quad P(G) \times P(R) = 0,6 \times 0,642 = 0,3852.$$

Les événements G et R ne sont pas indépendants.

7. a. Décrire par une phrase l'évènement $G \cup R$.

0,5

$G \cup R$ est l'évènement : « la plante choisie est un géranium ou elle donne des fleurs rouges ».

b. Calculer la probabilité de l'évènement $G \cup R$.

1

$$\begin{aligned}P(G \cup R) &= P(G) + P(R) - P(G \cap R) \\&= 0,6 + 0,642 - 0,45 \\&= 0,792\end{aligned}$$

Exercice 2

11 points

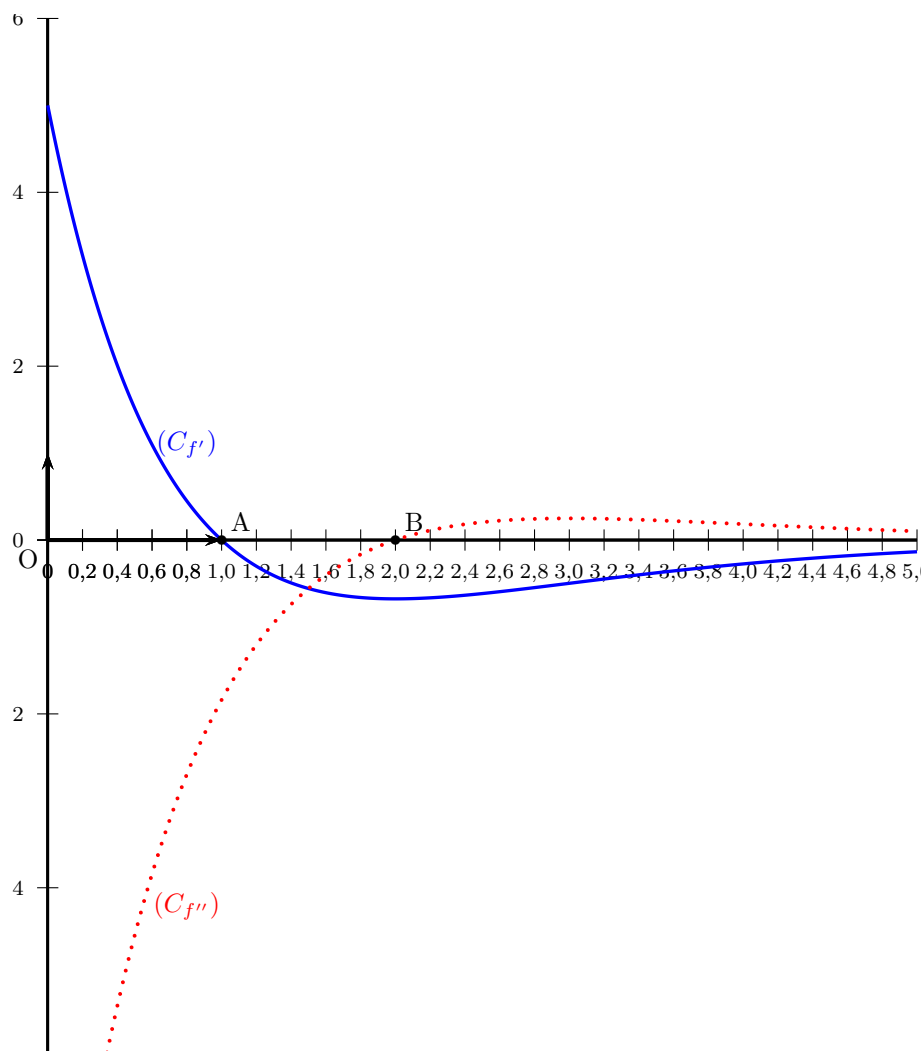
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$.

Partie A - À l'aide d'un graphique

3 points

On a représenté ci-dessous la courbe $(C_{f'})$ de la fonction dérivée f' ainsi que la courbe $(C_{f''})$ de la fonction dérivée seconde f'' sur l'intervalle $[0; 5]$.

Le point A de coordonnées $(1; 0)$ appartient à $(C_{f'})$ et le point B de coordonnées $(2; 0)$ appartient à la courbe $(C_{f''})$.



1. Déterminer le sens de variation de la fonction f . Justifier.

1

La fonction dérivée f' est strictement positive sur $[0; 1[$, et elle est strictement négative sur $]1; 5]$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1[$, et elle est strictement décroissante sur $]1; 5]$

2. Déterminer sur quel(s) intervalle(s), la fonction f est convexe. Justifier. 1
 La fonction f est convexe sur les intervalles où la dérivée seconde est positive.
 f'' est positive sur $[2; 5]$ donc f est convexe sur $[2; 5]$
3. La courbe de f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier. Si oui, préciser leur(s) d'abscisse(s). 1
 La courbe de f admet des points d'inflexion quand la dérivée seconde de la fonction f s'annule et change de signe ; donc la courbe de f admet sur $[0; 5]$ un point d'inflexion d'abscisse 2.

Partie B - Étude de la fonction

8 points

La fonction f est définie sur $[0; 5]$ par

$$f(x) = 5xe^{-x}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$. 2=0,5+1+0,5
 La fonction f est dérivable sur $[0; 5]$ comme produit et composée et fonctions dérivables sur cet intervalle.
 Pour tout réel x de $[0; 5]$:
 On pose $u(x) = 5x$ et $v(x) = e^{-x}$ alors $u'(x) = 5$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= 5 \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times 5x \\ &= 5e^{-x} - 5xe^{-x} \\ &= 5e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

Sur $[0; 5]$, $5e^{-x}$ est positif car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de f' ne dépend donc que du signe de $(1 - x)$

On retrouve ainsi la réponse de la question 1 de la partie A, c'est à dire, la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1[$ et elle est strictement décroissante sur $]1; 5]$

2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$ et les éventuels points d'inflexion 2
 La fonction f' est dérivable sur $[0; 5]$ comme somme produit et composée et fonctions dérivables sur cet intervalle.
 Pour tout réel x de $[0; 5]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5e^{-x} - 5xe^{-x} \\ f''(x) &= -5 \times e^{-x} - (5 \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times 5x) \\ &= -10e^{-x} + 5xe^{-x} \\ &= 5e^{-x}(x - 2) \end{aligned}$$

Pour tout réel x , $5e^{-x} > 0$ le signe de f'' ne dépend que du signe de $(x - 2)$ f'' est strictement négative sur $[0; 2[$, s'annule en 2 et est strictement positive sur $]2; 5]$

La fonction f est donc concave sur $[0; 2[$, convexe sur $]2; 5]$ et le point d'abscisse 2 est un point d'inflexion de (C_f)

3. a. Déterminer l'équation réduite de la tangente, T à la courbe, (C_f) , de f au point d'abscisse 3 2
 $T : y = f'(3)(x - 3) + f(3)$
 Or $f'(3) = 5e^{-3}(1 - 3) = -10e^{-3} = \frac{-10}{e^3}$ et $f(3) = 15e^{-3} = \frac{15}{e^3}$
 Donc $T : y = \frac{-10}{e^3} \times (x - 3) + \frac{15}{e^3}$
 $T : y = \frac{-10}{e^3}x + \frac{45}{e^3}$
- b. Étudier sur l'intervalle $]2; 5]$ la position de la courbe (C_f) par rapport à la tangente T 1
 La fonction f est convexe sur $]2; 5]$ la courbe (C_f) est au dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle et donc au dessus de la tangente T sur cet intervalle car $3 \in]2; 5]$

4. Montrer que la fonction F définie sur $[0; 5]$ par $F(x) = (-5x - 5)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0; 5]$. 1
 La fonction F est dérivable sur $[0; 5]$ comme produit et composée et fonctions dérivables.
 Pour tout réel x de $[0; 5]$:
 On pose $u(x) = -5x - 5$ et $v(x) = e^{-x}$ alors $u'(x) = -5$ et $v'(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} F'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= -5 \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times (-5x - 5) \\ &= -5e^{-x} + 5xe^{-x} + 5e^{-x} \\ &= 5xe^{-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f sur $[0; 5]$

Exercice 3

14 points

Partie A - Restitution Organisée de Connaissances

2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang n_0

Démontrer que si limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$

Soit I un intervalle de la forme $]A; +\infty[$, $A \in \mathbb{R}$ Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$ alors par définition, I contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang n_1

Posons $N = \max(n_0; n_1)$ alors pour tout entier naturel $n \geq N$ on a :

$u_n \in I$, c'est-à-dire, $A < u_n$ et $u_n \leq v_n$ donc $A < v_n$

Donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain rang N et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$

Partie B - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . 1

$$\begin{aligned} \text{Si } n = 0, u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + n - 2 \text{ devient } u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} \\ \text{Si } n = 1, u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + n - 2 \text{ devient } u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 \text{ soit } u_2 = -\frac{14}{9} \\ \text{Si } n = 2, u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + n - 2 \text{ devient } u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 \text{ soit } u_3 = -\frac{14}{27} \\ \text{Si } n = 3, u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + n - 2 \text{ devient } u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 \text{ soit } u_4 = \frac{67}{81} \end{aligned}$$

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$. 2

Soit P_n la propriété : " $u_n \geq n - 3$ " pour $n \geq 5$

Initialisation : Pour $n = 5$: $u_5 = \frac{1}{3}u_4 + 4 - 2 = \frac{553}{243}$, soit $u_5 \approx 2,28$ donc $u_5 \geq 5 - 3$.

La propriété est vraie pour $n = 5$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 5$ un entier quelconque fixé.

On suppose la propriété vraie au rang n , c'est à dire $u_n \geq n - 3$. (*hypothèse de récurrence*)

Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est à dire $u_{n+1} \geq (n + 1) - 3 = n - 2$

Par hypothèse de récurrence $u_n \geq n - 3$ on multiplie par $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3}u_n \geq \frac{1}{3}(n - 3) \text{ on ajoute } n - 2$$

$$\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq \frac{1}{3}(n - 3) + n - 2$$

$$\text{soit } u_{n+1} \geq \frac{1}{3}n - 1 + n - 2$$

$$\text{Or } n \geq 5 \text{ donc } \frac{1}{3}n \geq 1$$

$$\text{Donc } u_{n+1} \geq n - 2$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 5, et elle est héréditaire. Donc elle est vraie pour tout entier naturel $n \geq 5$, c'est à dire $u_n \geq n - 3$ pour tout entier naturel $n \geq 5$.

- b. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. 1
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 3) = +\infty$ et pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$ donc d'après le théorème de comparaison : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

- a. Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -\frac{25}{2}$. 2
 Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\ &= -2 \left(\frac{1}{3}u_n + n - 2 \right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= -\frac{2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{3} \times (-2u_n) + \frac{1}{3} \times 3n - \frac{1}{3} \times \frac{21}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme :

$$v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}.$$

- b. En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$. 0,5+1

D'après la question précédente on a :

Pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 \times q^n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$\text{et } v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

$$\text{donc } -2u_n = -\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n - 3n + \frac{21}{2}$$

$$\text{soit } 2u_n = \frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3n - \frac{21}{2};$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left[\frac{25}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + 3n - \frac{21}{2} \right]$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}.$$

- c. Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n .

1,5 même si inachevé

Soit n un entier naturel et :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \frac{3}{2}(1 + 2 + \dots + n) - \frac{21}{4} \times (n+1)$$

$$S_n = \frac{25}{4} \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{3} \right)^k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^{k=n} k - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{21}{4}$$

La première somme est celle des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1)$$

$$S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} + \frac{3n^2}{4} + \frac{3n}{4} - \frac{21n}{4} - \frac{21}{4}$$

$$S_n = -\frac{75}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3n^2}{4} - \frac{9n}{2} - \frac{33}{8}$$

Partie C - Fonction Python

3 points

1. On considère la fonction Python, mystere, ci-dessous, qu'obtient-on si on saisit dans la console mystere(3) ?
1 pour u_0, u_1, u_2 sous n'importe quelle forme

```
def mystere(n):
    L=[1]
    for k in range(1,n):
        L.append((1/3)*L[k-1]+(k-1)-2)
    return L
```

```
>>> mystere(3)
[1, -1.6666666666666667, -1.5555555555555556] \\
```

La console affiche la liste des trois premiers termes de la suite u

2. a. Écrire, en Python, une fonction seuil(A) qui détermine le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$ où u_n désigne le terme général de la suite définie à la partie B 1

```
def seuil(A):
    u=1
    n=0
    while u<A:
        u=1/3*u+n-2
        n=n+1
    return(n)
```

- b. Quel est le résultat obtenu pour seuil(20) ? 1

seuil(20) renvoie 17
 en effet $u_{16} \approx 18,75 < 20$ et $u_{17} \approx 20,25 > 20$

Exercice 4

8 points

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Justifier dans chaque cas. Toute trace de recherches même incomplètes sera valorisée

1. La suite (v_n) est bornée par 0 et 1.

2

VRAI

Par hypothèse la suite (u_n) est positive. On en déduit pour tout n :

$$v_n \geq 0 \text{ et } u_n \leq 1 + u_n$$

en divisant par $(1 + u_n) > 0$ on obtient $\frac{u_n}{1+u_n} \leq 1$

Donc pour tout entier n , $0 \leq v_n \leq 1$

2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

2

VRAI

Par hypothèse (u_n) a une limite finie que l'on note ℓ : les théorèmes sur les limites nous garantissent $\ell \geq 0$ puisque (u_n) est positive.

D'après le théorème sur la limite d'une somme, nous avons : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + u_n) = 1 + \ell > 0$. Puisque ce nombre

est différent de 0, nous obtenons en appliquant le théorème sur la limite d'un quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{\ell}{1 + \ell}$.

La suite (v_n) est donc convergente.

3. Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.

2

VRAI

Calculons la différence entre deux termes consécutifs de (v_n) :

Pour tout entier n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} - \frac{u_n}{1 + u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}(1 + u_n)}{1 + u_{n+1}} - \frac{u_n(1 + u_{n+1})}{1 + u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{(1 + u_{n+1})(1 + u_n)}$$

Puisque (u_n) est croissante, nous avons pour tout n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Nous en déduisons $v_{n+1} - v_n \geq 0$ et donc (v_n) croissante.

4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

2

FAUX

Un contre-exemple est obtenu en posant pour tout n : $u_n = n$. Cette suite diverge car elle tend vers $+\infty$.

Dans ce cas nous avons :

$$v_n = \frac{n}{1 + n} = 1 - \frac{1}{1 + n}$$

Les théorèmes sur les limites et les opérations nous donnent $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Par conséquent (v_n) est convergente alors que (u_n) est divergente.