

Devoir Maison n°1

Partie obligatoire

Consignes :

Par groupe de 2, vous résoudrez l'exercice ci-dessous.

Vous devrez vous filmer pour présenter sa correction.

Par exemple, il est possible de se filmer en train de résoudre l'exercice, ou bien de filmer une correction déjà écrite tout en présentant oralement ce que vous avez écrit.

Les deux élèves doivent intervenir dans la vidéo.

N'hésitez pas à être inventif, la seule contrainte est de fournir une vidéo qui présente la correction.

La vidéo est à déposer sur votre espace pearltrees.

En créant une collection privée, vous pourrez gérer les droits d'accès à votre travail (il faudra simplement m'ajouter dans les personnes autorisées à voir votre collection privée).

Exercice vidéo :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + x + 1}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-x^2 - 3x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.
3. La fonction f admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales ? Justifier et préciser éventuellement l'abscisse des points concernés.

Partie non obligatoire :

Consignes :

Résoudre sur feuille les exercices ci-dessous (vous pouvez ne pas tout faire).

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.

Montrer alors que la suite (u_n) est croissante.

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$
 - a. Exprimer u_n en fonction de v_n .
 - b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.
 - c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$

Exercice 2 :

Soit (T_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$T_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n}$$

1. Justifier que $T_1 = \frac{1}{2}$ et $T_2 = \frac{11}{15}$.
2. Démontrer que pour tout entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq T_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$.
4. En déduire la limite de la suite (T_n) .