

Correction – Devoir Maison n°1

Partie obligatoire

Exercice vidéo :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2 + x + 1}$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(-x^2 - 3x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\text{où } u(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 + x + 1$$

On pourrait justifier pourquoi f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (même si ce n'est pas demandé).

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$$

$\Delta < 0$ donc la fonction v n'admet pas de racine réelle.

De plus, elle est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$ car $a = 1$ est positif.

$$\text{donc } u'(x) = -e^{-x} \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x + 1$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{-e^{-x}(x^2 + x + 1) - (2x + 1)e^{-x}}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{e^{-x}(-x^2 - x - 1 - 2x - 1)}{(x^2 + x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{-x}(-x^2 - 3x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 0.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 0 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{e^{-0}(-0^2 - 3 \times 0 - 2)}{(0^2 + 0 + 1)^2}x + \frac{e^{-0}}{0^2 + 0 + 1} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1 \times (-2)}{1^2}x + \frac{1}{1} \\ \Leftrightarrow y &= -2x + 1 \quad \text{est l'équation réduite de cette tangente.} \end{aligned}$$

3. La fonction f admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales ?

Justifier et préciser éventuellement l'abscisse des points concernés.

f admet une tangente horizontale au point d'abscisse x

$$\Leftrightarrow \text{le coefficient directeur de la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ au point d'abscisse } x \text{ est égale à } 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-e^{-x}(-x^2 - 3x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -e^{-x}(-x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \text{car pour tout } x \in \mathbb{R} : e^{-x} \neq 0 \text{ puisque } e^{-x} > 0.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ donc cette équation admet deux solutions :

$$\begin{array}{l|l} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} & = \frac{3 + 1}{-2} \\ = \frac{3 - 1}{-2} & = -2 \\ = -1 & \end{array}$$

Ainsi, f admet deux tangentes horizontales :

une au point d'abscisse $x = -1$ et une autre au point d'abscisse $x = -2$.

Partie non obligatoire :

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n}$

- Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la proposition $u_n > 0$.

- Initialisation : Pour $n = 0$:

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ donc } u_0 > 0.$$

Ainsi, P_0 est vraie.

- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie i.e. $u_k > 0$.

Montrons alors que P_{k+1} est vraie i.e. $u_{k+1} > 0$.

On a : $u_k > 0$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

donc $2u_k > 0$ puis $1 + 2u_k > 1$ en particulier $1 + 2u_k > 0$

donc $\frac{1}{1 + 2u_k} > 0$ (d'après règle des signes)

donc $\frac{3u_k}{1 + 2u_k} > 0 \times 3u_k$ car $3u_k > 0$ puisque $u_k > 0$

d'où $u_{k+1} > 0$

Ainsi, P_{k+1} est vraie.

Autre rédaction pour démontrer l'hérédité :

$$u_{k+1} = \frac{3u_k}{1 + 2u_k}$$

D'une part, $u_k > 0$ donc $3u_k > 0$.

D'autre part, $u_k > 0$ donc $1 + 2u_k > 1 > 0$.

Ainsi, par quotient de deux nombres positifs, $u_{k+1} > 0$.

- Conclusion : La proposition P_n est vraie au rang $n = 0$ et est héréditaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. On admet que pour tout entier naturel n , $u_n < 1$.

Montrer alors que la suite (u_n) est croissante.

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{1 + 2u_n} - u_n \\ &= \frac{3u_n}{1 + 2u_n} - \frac{u_n(1 + 2u_n)}{1 + 2u_n} \\ &= \frac{3u_n - u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} \\ &= \frac{2u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} \\ &= \frac{2u_n(1 - u_n)}{1 + 2u_n} \end{aligned}$$

Or, $2u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$ car $u_n > 0$

donc le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend uniquement du signe de $1 - u_n$.

D'autre part, on a admis que $u_n < 1$ donc $0 < 1 - u_n$ i.e. $1 - u_n > 0$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante (donc croissante) sur $\mathbb{N}$.

3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$

a. Exprimer u_n en fonction de v_n .

Remarque : la suite (v_n) est bien définie car $1 - u_n > 0$ puisque $u_n < 1$.

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n}{1 - u_n} \\ \Leftrightarrow v_n(1 - u_n) &= u_n \\ \Leftrightarrow v_n - v_n u_n &= u_n \\ \Leftrightarrow v_n &= u_n + v_n u_n \\ \Leftrightarrow v_n &= u_n(1 + v_n) \\ \Leftrightarrow \frac{v_n}{1 + v_n} &= u_n \quad \text{i.e.} \quad u_n = \frac{v_n}{1 + v_n} \end{aligned}$$

b. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 3.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{1 - \frac{3u_n}{1 + 2u_n}} \\ &= \frac{\frac{3u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{1 + 2u_n - 3u_n}{1 + 2u_n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1-u_n}{1+2u_n}} \\
&= \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{1-u_n} \\
&= \frac{3u_n}{1-u_n}
\end{aligned}$$

L'idée était de simplifier au maximum la fraction avant d'aller plus loin !

Méthode 1 :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= 3 \times \frac{u_n}{1-u_n} \\
&= 3v_n
\end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{3 \times \frac{v_n}{1+v_n}}{1 - \frac{v_n}{1+v_n}} \\
&= \frac{\frac{3v_n}{1+v_n}}{\frac{1+v_n}{1+v_n} - \frac{v_n}{1+v_n}} \\
&= \frac{\frac{3v_n}{1+v_n}}{\frac{1}{1+v_n}} \\
&= \frac{3v_n}{1+v_n} \times \frac{1+v_n}{1} \\
&= 3v_n
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$.

c. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$

D'après la question 3a :

$$u_n = \frac{v_n}{1+v_n}$$

Or, on déduit de la question 3b que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n$

$$\text{avec } q = 3 \text{ et } v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Donc $v_n = 1 \times 3^n = 3^n$.

On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3^n}{1+3^n}$$

Exercice 2 :

Soit (T_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$T_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

1. Justifier que $T_1 = \frac{1}{2}$ et $T_2 = \frac{11}{15}$.

$$T_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$T_2 = \frac{2}{2^2+1} + \frac{2}{2^2+2} = \frac{2}{5} + \frac{2}{6} = \frac{12}{30} + \frac{10}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

2. Démontrer que pour tout entiers n et k tels que $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$0 < n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$$

Donc en composant par la fonction inverse, qui est décroissante sur $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2 + 1} &\geq \frac{1}{n^2 + k} \geq \frac{1}{n^2 + n} \\ \text{i.e. } \frac{1}{n^2 + n} &\leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1} \\ \text{puis } \frac{n}{n^2 + n} &\leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \quad \text{car } n > 0 \end{aligned}$$

3. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq T_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$.

Autrement dit, on a les encadrements :

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \quad (1) \quad \text{obtenue lorsque } k = 1$$

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + 2} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \quad (2) \quad \text{obtenue lorsque } k = 2$$

...

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + 1} \quad (n) \quad \text{obtenue lorsque } k = n$$

En sommant ces n encadrements, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2 + n} + \dots + \frac{n}{n^2 + n} &\leq \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n}{n^2 + 1} \\ \text{i.e. } \frac{n}{n^2 + n} \times n &\leq T_n \leq \frac{n}{n^2 + 1} \times n \\ \text{d'où } \frac{n^2}{n^2 + n} &\leq T_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

4. En déduire la limite de la suite (T_n) .

- D'une part :

$$\frac{n^2}{n^2 + n} = \frac{n^2}{n^2 \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

donc par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = 1$

- D'autre part :

$$\frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

On obtient de la même manière que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$

- Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 1$$