

Exercices de dénombrement

Exercice 1.

Simplifier les écritures sans utiliser la calculatrice.

- 1) $\frac{21!}{20!}$ 2) $\frac{17!}{15!}$ 3) $\frac{6! - 5!}{5!}$ 4) $\frac{6 \times 4!}{5!}$ 5) $\frac{7! \times 5!}{10!}$
6) $\frac{1}{5!} - \frac{42}{7!}$ 7) $\frac{6!}{3! \times 3!}$ 8) $\frac{9!}{5! \times 4!}$ 9) $\frac{9!}{6! \times 3!}$ 10) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$
11) $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ 12) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$ 13) $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$

Exercice 2.

Sans calculatrice, déterminer les nombres suivants :

$$A = \binom{6}{2} \quad B = \binom{12}{8} \quad C = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}} \quad D = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}.$$

Exercice 3.

Montrer pour $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n$ que : $n \times \binom{n-1}{p-1} = p \times \binom{n}{p}$.

Exercice 4.

Déterminer l'entier n satisfaisant la condition indiquée

- 1) $\binom{n}{2} = 36$ 2) $3 \times \binom{n}{4} = 14 \times \binom{n}{2}$

Exercice 5.

On jette un dé à 6 faces, trois fois de suite et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure.

- 1) Quel est le nombre de résultats possibles ?
- 2) Quel est le nombre de résultats comportant 3 chiffres identiques ?
- 3) Quel est le nombre de résultats comportant 3 chiffres distincts deux à deux ?
- 4) Quel est le nombre de résultats comportant seulement 2 chiffres identiques ?

Exercice 6.

- 1) Dans un meeting d'athlétisme, la finale de saut en longueur comprend douze athlètes ; il n'y a pas d'ex-æquo. Combien existe-t-il de classements possibles ?
- 2) La finale du 100 m plat comprend huit athlètes ; tous arrivent et il n'y a pas d'ex-æquo. Combien existe-t-il d'arrivées dans l'ordre des trois premiers ?

Exercice 7.

On constitue un groupe de 6 personnes choisies parmi 25 femmes et 32 hommes.

- 1) Combien de façons y a-t-il de constituer ce groupe ?
- 2) Combien y en a-t-il ne comportant que des hommes ?
- 3) Combien y en a-t-il ne comportant que des personnes de même sexe ?
- 4) Combien y en a-t-il comportant au moins une femme et au moins un homme ?

Exercice 8.

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules jaunes et 2 boules vertes. On tire au hasard trois boules simultanément. **Sans calculatrice :**

- 1) déterminer le nombre de tirages possibles.
- 2) déterminer le nombre de tirages comportant :
 - a) 3 boules de la même couleur ?
 - b) 1 boule de chaque couleur ?
 - c) 3 boules de deux couleurs différentes seulement ?

Exercice 9.

Chaque semaine, un jeu de Loto sportif propose une grille avec 15 rencontres de football. Le jeu consiste à pronostiquer les résultats des 7 premiers matchs de la liste (jeu à 7) ou des 15 matchs (jeu à 15). Pour chaque match, trois réponses sont possibles : l'équipe 1 gagne (réponse « 1 »), les équipes 1 et 2 font match nul (réponse « N »), l'équipe 2 gagne (réponse « 2 »).

Le parieur coche une seule des trois cases

1	N	2
---	---	---

- 1) De combien de façons différentes, peut-on remplir une grille pour le jeu à 7 et pour le jeu à 15 ?
- 2) Pour le jeu à 7, on « gagne » à partir de 6 réponses exactes et pour le jeu à 15 à partir de 12 réponses exactes. Combien y a-t-il de grilles gagnantes pour le jeu à 7 et pour le jeu à 15 ?

Exercice 12.

Le jeu de Master Mind® se joue à deux joueurs. Un joueur dispose cinq pions dans cinq trous, les pions sont choisies parmi huit couleurs, et le joueur dispose de cinq pions de chaque couleur. L'autre joueur doit deviner la disposition choisie par l'autre.

- 1) Combien de dispositions peut-on constituer ?
- 2) On place au plus cinq pions dans les cinq trous (certains trous peuvent rester vides). Combien y a-t-il de dispositions possibles ?
- 3) Le constructeur annonce 59 049 combinaisons possibles. Est-ce justifié ?

25 Delphine doit choisir un code secret composé de cinq chiffres distincts compris entre 0 et 6.

- a) Combien a-t-elle de choix possibles ?
 b) Parmi tous les codes possibles, combien se terminent par le chiffre 0 ?

28 E est l'ensemble $\{7; 8; 2; 9; 3; 1\}$.

- a) Les permutations de cet ensemble peuvent être écrites sous la forme de nombres entiers à six chiffres. Donner le plus petit et le plus grand de ces nombres.
 b) Calculer le nombre total de permutations de E.

33 Une classe de 12 élèves rassemble 7 filles et 5 garçons. Un professeur range les copies de ces 12 élèves dans un ordre aléatoire.

- a) Combien y a-t-il de façons de ranger ces copies ?
 b) Combien y a-t-il de façons de ranger les copies en commençant par les copies des filles ?
 c) Si on commence par les copies des garçons, cela modifie-t-il le nombre de façons de ranger les copies ?

37 Pour partir en vacances, Valentina souhaite emporter cinq livres parmi huit qu'elle n'a pas encore lus.

- a) Combien a-t-elle de façons de choisir ces 5 livres ?
 b) Elle se rend finalement compte qu'elle a déjà lu l'un de ces livres.

Quel est alors le nombre de façons de choisir les cinq livres parmi ceux qu'elle n'a pas encore lus ?

40 On lance 6 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on observe si le côté visible est Pile ou Face.

On imagine représenter cette situation par un arbre.

1. a) Combien y aurait-il de chemins sur cet arbre ?
 b) Dans cet arbre, combien y aurait-il de chemins contenant :

- six fois Pile ? • six fois Face ?

c) Pour k allant de 1 à 5, calculer le nombre de chemins qui contiendraient k fois Pile.

2. Dans chaque cas, déterminer le nombre de chemins répondant à la contrainte indiquée.

- a) On a obtenu Pile au 4^e lancer.
 b) On a obtenu Pile au 2^e lancer et Face au 5^e.

41 Dans un lycée, les 36 délégués de classe doivent élire un comité de trois élèves.

1. On suppose que les trois élèves ont le même rôle.

- a) Combien y a-t-il de comités différents possibles ?
 b) On sait de plus que, parmi les délégués, 20 sont des filles et 16 sont des garçons.

Calculer le nombre de comités possibles dans lesquels il y a davantage de filles que de garçons.

2. On suppose que les trois élèves du comité peuvent être président, adjoint, secrétaire.

Reprendre alors les questions a) et b) de 1.

47 Le Kinball est un sport dans lequel plusieurs équipes se passent un gros ballon. Le but du jeu est d'obliger une équipe adverse à laisser tomber le ballon au sol. Dans ce sport, tous les joueurs d'une équipe ont le même rôle.



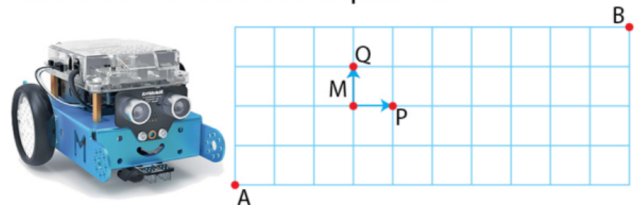
Alice entraîne un club de Kinball qui compte 42 adhérents. Avant un championnat, elle doit choisir 10 personnes qui y participeront.

1. Combien de choix possibles s'offrent à Alice pour cette sélection de 10 joueurs ?

2. Parmi les 42 adhérents, il y a 22 filles et 20 garçons. Combien Alice a-t-elle de choix possibles pour une équipe :

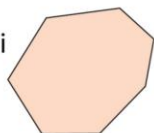
- a) qui ne comporte que des filles ?
 b) qui comporte un seul garçon ?
 c) qui comporte autant de garçons que de filles ?
 d) qui comporte deux garçons de plus que de filles ?

62 Un robot se déplace le long du quadrillage ci-dessous, de côtés 10 et 4. Il ne peut se déplacer que vers la droite ou vers le haut. Ainsi, en partant du point M, il ne peut se rendre qu'en P ou en Q. On s'intéresse au nombre de chemins d'un point à un autre.



- a) Quels points se trouvent à deux unités de A ? Déterminer le nombre de chemins qui relient A à chacun de ces points.
 b) Comparer les nombres de chemins qui relient A à M, A à P, A à Q.
 c) Déterminer le nombre de chemins qui relient A à B.

67 Un polygone convexe (tel que celui ci-contre) a n côtés (avec n nombre entier naturel, $n \geq 3$).



Exprimer en fonction de n son nombre de diagonales.

70 n désigne un nombre entier naturel, $n \geq 1$. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules de l'urne.

a) Exprimer en fonction de n le nombre de tirages possibles.

b) p désigne un nombre entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. Démontrer que le nombre de tirages avec exactement

p boules blanches est $\binom{n}{p}$.

c) En déduire la somme : $S = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$.

72 Dans un lycée, une classe de 32 élèves (20 filles et 12 garçons) doit être dédoublée pour les cours de sciences.

On doit donc constituer un groupe de 16, que l'on appelle groupe A, l'autre groupe étant alors constitué des élèves restants.

Marina affirme : « Il y a une chance sur deux que le groupe A comporte autant de filles que de garçons ». A-t-elle raison ? Justifier.

76 On dispose de deux urnes :

- urne A : dix boules bleues et dix boules rouges ;
- urne B : cinq boules bleues et quinze boules rouges.

1. On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne A.

a) Calculer le nombre de tirages possibles.

b) Quelle est la probabilité de tirer :

- trois boules bleues ? • trois boules rouges ?

c) En déduire la probabilité de tirer trois boules de la même couleur.

2. On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne B.

Calculer la probabilité de tirer trois boules de la même couleur.

3. On lance une pièce équilibrée. Si l'on obtient Pile, on tire, simultanément, trois boules de l'urne A, sinon, on les tire de l'urne B.

a) Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré de probabilités.

b) Déterminer la probabilité de tirer trois boules de la même couleur.

78 Carolina joue avec un bilboquet. À chaque tentative, la probabilité qu'elle gagne est 0,7. Elle effectue trois tentatives successives et X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré de probabilités.

2. Calculer la probabilité qu'elle réussisse trois fois.

3. a) Quel est le nombre de chemins dans lesquels elle réussit une fois exactement ?

b) Calculer la probabilité le long d'un de ces chemins.

c) En déduire la probabilité qu'elle réussisse exactement une fois.

4. En s'inspirant de la méthode de la question 3., déterminer la probabilité que Carolina réussisse exactement deux fois.

5. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

85 Retrouver le triangle de Pascal

Modéliser Raisonner

Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Combien y a-t-il de tirages où les trois boules :

a) portent un numéro inférieur ou égal à 3 ?

b) portent un numéro inférieur ou égal à 4 ?

2. k désigne un nombre entier naturel tel que $3 \leq k \leq 7$.

Exprimer avec une combinaison le nombre de tirages où figurent la boule n° k et deux boules de numéros inférieurs à k .

3. a) En déduire des nombres entiers naturels n et p tels que :

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} = \binom{n}{p}.$$

b) Démontrer à nouveau cette formule avec la relation de Pascal.

97 Notation des permutations

On se propose de découvrir de nouvelles façons de noter les permutations de l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$.

1. On peut représenter chaque permutation de l'ensemble E par un tableau à deux lignes, qui indique la nouvelle position de chaque élément.

a) Quelle permutation σ_1 de E est représentée par la notation $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$?

b) Énumérer toutes les permutations de l'ensemble E et donner leurs notations sur le modèle précédent.

2. On remarque que la permutation σ_1 est en fait constituée de deux **cycles disjoints** de longueur 2 : 1 et 4 sont échangés entre eux, de même que 2 et 3. On peut alors utiliser une nouvelle notation dite **forme canonique** : $\sigma_1 = (1\ 4)(2\ 3)$.

a) Écrire sous forme de tableau les permutations représentées par chacune des notations ci-dessous :

- $\sigma_2 = (1\ 3)(2\ 4)$
- $\sigma_3 = (1)(2\ 3)(4)$
- $\sigma_4 = (1)(2)(3\ 4)$
- $\sigma_5 = (1)(2)(3)(4)$

b) La permutation σ_5 est appelée identité.

Qu'a-t-elle de spécial ?

c) La forme canonique $(1\ 2\ 3)(4)$ représente la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Les permutations $(1\ 2\ 3)(4)$ et $(1\ 3\ 2)(4)$ sont-elles les mêmes ?

d) Écrire toutes les permutations de l'ensemble E en utilisant la forme canonique.

e) Déterminer, pour l'ensemble E , le nombre :

- de cycles de longueur 2 ;
- de cycles de longueur 3 ;
- de cycles de longueur 4.

3. Composer la permutation $\sigma_1 = (1\ 4)(2\ 3)$ suivie de la permutation $\sigma_2 = (1\ 3)(2\ 4)$ c'est les appliquer l'une après l'autre.

Ainsi :

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \sigma_1 \swarrow & & & & \\ & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \sigma_2 \swarrow & & & & \\ & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Autrement dit, $\sigma_2 \circ \sigma_1 = (1\ 2)(3\ 4)$.

a) Vérifier que $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$.

b) Quelle est la permutation $\sigma_1 \circ \sigma_1$?

c) Comparer les permutations $\sigma_2 \circ \sigma_3$ et $\sigma_3 \circ \sigma_2$.

4. L'inverse de la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

notée σ^{-1} , est la permutation $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

obtenue en lisant la permutation σ de bas en haut.

La permutation σ^{-1} est telle que :

$$\sigma^{-1} \circ \sigma = (1)(2)(3)(4).$$

a) Vérifier que $\sigma \circ \sigma^{-1} = (1)(2)(3)(4)$.

b) Déterminer l'inverse de chacune des permutations σ_2 , σ_5 et $\sigma_6 = (1\ 2\ 3)(4)$.

c) Que peut-on dire de l'inverse d'un cycle de longueur 2 ?

d) Vérifier que chaque permutation de l'ensemble E admet un inverse.