T spé G	**DST de Mathématiques n°1** *Durée : 1h55 min. La calculatrice est autorisée.*	*ISC* Octobre 23

La démonstration par récurrence n'est **pas conseillée dans l'exercice 1**.

Exercice 1 : (8 points)

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 4n^2 - 8n + 1.$$

On se propose d'étudier la limite de la suite (u_n) de trois façons différentes.

1. a) Démontrer que pour tout n, $u_n = 4(n-1)^2 - 3$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

2. Pour tout $n \geqslant 1$, mettre $4n^2$ en facteur dans l'expression de u_n et conclure pour la limite de (u_n).

3. a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 2n^2$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (14 points)

Soit la suite numériq léfinie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1) a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3) On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

a) Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 3 : (8 points)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

• la suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.

• la suite (v_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Expliquer pourquoi le programme Python ci-contre se termine et ce que renvoie l'appel algo(6).

4. On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, $0 \leqslant \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$.

```python
def algo(p):
    u=1
    n=0
    while u<=10**p:
        u=2*u-n+3
        n=n+1
    return n
```