

Ex 1

(A) $g(x) = x + 2 - e^x$ sur $[0; +\infty[$

(1) $\forall x \geq 0 \quad g'(x) = 1 - e^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$	$-$	1	$-$
$g(x)$		$\nearrow 1$	$\searrow$

$\rightarrow$ donc sur $[0; +\infty[$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	1	0	$-$

(2) on trouve par tableaux de valeurs successifs $1,14 < \alpha < 1,15$

(3) $\frac{x}{g(x)} \mid \begin{array}{ccc} 0 & \alpha & +\infty \\ + & 0 & - \end{array}$

(B) (1) a) $\forall x \in [0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (e^x + xe^x)(e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2}$

$$= \frac{xe^{2x} + e^x - e^{2x} - xe^{2x} + xe^x}{(xe^x + 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(2 - e^x + x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

b) $\forall x \geq 0$ on a $\frac{e^x}{(xe^x + 1)^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow f(\alpha)$	$\searrow$

(2) a) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

b) $1,14 < \alpha < 1,15 \Rightarrow 2,14 < \alpha + 1 < 2,15 \Rightarrow \frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14}$

$$\Rightarrow 0,46 < f(\alpha) < 0,47$$

(3) Tangente T_0 : $y = f'(0)(x - 0)$ soit $y = x$

(1) a) $\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - \frac{x(xe^x + 1)}{xe^x + 1} = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1}$

et $(x+1)u(x) = (x+1)(e^x - xe^x - 1) = \dots = e^x - 1 - x^2 e^x - x$

donc $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$

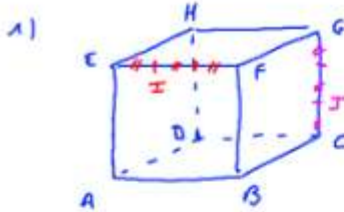
b) $\forall x \in [0; +\infty[\quad u'(x) = e^x - e^x - xe^x = -xe^x \rightarrow$ du signe de $-x$

x	0	$+\infty$
$u'(x)$		$-$
$u(x)$	0	$\searrow$

donc $\forall x \in [0; +\infty[\quad u(x) \leq 0$

c) $\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) - x$ est du signe de $u(x)$ car $\frac{x+1}{xe^x + 1} > 0$

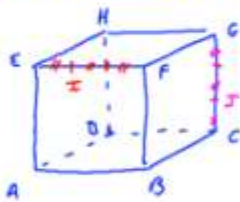
donc $f(x) - x \leq 0 \rightarrow$ la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessous de T sur $[0; +\infty[$



$$\begin{aligned}
 2) \quad \vec{IJ} &= \vec{IF} + \vec{FG} + \vec{GJ} \\
 &= \frac{2}{3} \vec{EF} + \vec{FG} + \frac{2}{3} \vec{GC} \\
 &= \frac{2}{3} \vec{EF} + \vec{FG} + \frac{2}{3} (\vec{GE} + \vec{EC}) \\
 &= \frac{2}{3} (\vec{GE} + \vec{EF}) + \vec{FG} + \frac{2}{3} \vec{EC} \\
 &= \frac{2}{3} \vec{GF} + \vec{FG} + \frac{2}{3} \vec{EC} \\
 &= \frac{2}{3} \vec{EC} + \frac{1}{3} \vec{FG}
 \end{aligned}$$

Bi Pan: $\vec{IJ}$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de $\vec{EC}$ et $\vec{FG}$
donc ces 3 vecteurs sont coplanaires.

3) a) Soit la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$



$$\vec{FG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{IJ} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \vec{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Montrons qu'il existe 2 réels α et β tels que $\vec{IJ} = \alpha \vec{FG} + \beta \vec{EC}$

$$\alpha \vec{FG} + \beta \vec{EC} = \vec{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\alpha + 1\beta = \frac{2}{3} \\ 1\alpha + 1\beta = 1 \\ 0\alpha - 1\beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ \alpha + \beta = 1 \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Bi Pan les 3 vecteurs sont coplanaires car $\vec{IJ} = \frac{1}{3} \vec{FG} + \frac{2}{3} \vec{EC}$