EXERCICE 1 Problème d'analyse avec étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+1}$.

⋆ Partie A ⋆ ⋆ étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=x+2-\mathrm{e}^x$.

1. Étudier le sens de variation de g sur $[0\,;\,+\infty[$..

2. On admet que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0\,;\,+\infty[$. Déterminer à la calculatrice un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

⋆ Partie B ⋆ Étude de la fonction f

1. a. Montrer que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}$.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. a. Établir que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

b. En utilisant l'encadrement de α établi dans la question **A.2.**, donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2}.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. a. Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$,

$$f(x)-x=\frac{(x+1)\,u(x)}{x\mathrm{e}^x+1}\quad\text{avec } u(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1.$$

b. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.

c. Déduire des questions précédentes la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (T).

EXERCICE 2 Deux méthodes pour conclure!

On considère un cube $ABCDEFGH$

On définit les points I et J par les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{EI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{GC}$

1. Dessiner un cube en perspective et placer les points I et J.

L'objectif de cet exercice est de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ ne forment pas une base de l'espace.

2. Méthode vectorielle

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FG}$.

b. Conclure.

3. Méthode analytique

a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans une base de l'espace que vous choisirez.

b. Montrez que ces trois vecteurs sont coplanaires, et conclure.