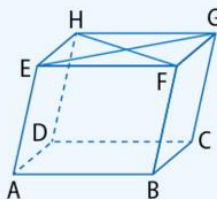


Capacité 7 p 57

Lire sur une figure si des vecteurs forment une base

ABCDEFGH est un parallélépipède et O est le centre du parallélogramme EFGH.

- 1 Donner deux vecteurs qui forment une base du plan (ABC).
- 2 a. Justifier que $(\vec{AC}, \vec{OH})$ est une base du plan (ABC).
b. Compléter la base $(\vec{AC}, \vec{OH})$ pour former une base de l'espace.
- 3 $(\vec{GO}, \vec{FB}, \vec{CE})$ est-elle une base de l'espace ? Justifier.



Solution commentée

- 1 Les points A, B et C ne sont pas alignés donc $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de (ABC).
- 2 a. O est le centre de EFGH donc $\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{FH}$. Or ABCDEFGH est un parallélépipède donc $\vec{FH} = \vec{BD}$ et $\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{BD}$.
Dans le plan (ABC), les droites (AC) et (BD) sont sécantes donc les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{BD}$ ne sont pas colinéaires, on déduit que $\vec{AC}$ et $\vec{OH}$ ne sont pas colinéaires.
Comme $\vec{BD}$ est un vecteur de la direction du plan (ABC), $\vec{OH}$ l'est aussi. $(\vec{AC}, \vec{OH})$ est donc une base de (ABC).
b. $\vec{BF}$ n'est pas un vecteur de la direction du plan (ABC) car B appartient à (ABC) mais F n'appartient pas à (ABC). On déduit que $(\vec{AC}, \vec{OH}, \vec{BF})$ est une base de l'espace.
- 3 $\vec{CE} = \vec{CG} + \vec{GE} = -\vec{FB} + 2\vec{GO}$ car BCGF est un parallélogramme et O est le milieu de [GE]. $\vec{CE}$, $\vec{FB}$ et $\vec{GO}$ sont coplanaires donc ils ne forment pas une base de l'espace.

Capacité 8 p 57

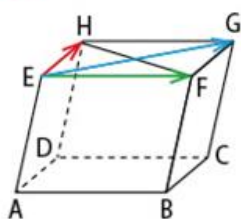
Lire la décomposition d'un vecteur dans une base

On considère le parallélépipède ABCDEFGH représenté à la capacité 7 précédente.

- 1 Décomposer les vecteurs $\vec{EG}$ et $\vec{OH}$ dans la base $(\vec{EF}, \vec{EH})$.
- 2 Décomposer les vecteurs $\vec{BH}$ et $\vec{AO}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

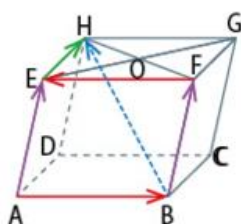
Solution commentée

1 • $\vec{EG} = \vec{EF} + \vec{EH}$



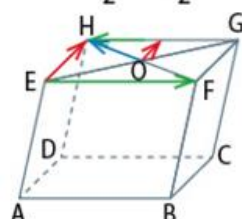
Cela traduit directement de la règle du parallélogramme.

2 • $\vec{BH} = -\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$



On a $\vec{BH} = \vec{BF} + \vec{FE} + \vec{EH}$ avec $\vec{BF} = \vec{AE}$,
 $\vec{FE} = -\vec{AB}$ et $\vec{EH} = \vec{AD}$ puisque ABCDEFGH est un parallélépipède.

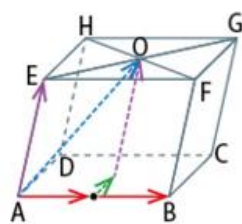
• $\vec{OH} = -\frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{EH}$



En effet, O est le milieu de [FH] donc

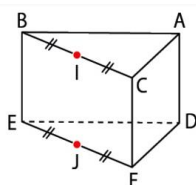
$\vec{OH} = \frac{1}{2}\vec{FH} = \frac{1}{2}\vec{FE} + \frac{1}{2}\vec{EH}$.

• $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$



On a $\vec{AO} = \vec{AE} + \vec{EO}$ donc
 $\vec{AO} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{EH}$ puisque O est le centre de EFGH.

Pour les exercices 79 et 80, ABCDEF est un prisme à base triangulaire. I est le milieu de [BC] et J est celui de [EF].



N° 79 p 69

1. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forment une base du plan (ABC).
2. a. Justifier que $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC})$ est aussi une base du plan (ABC).
- b. Compléter cette base pour former une base de l'espace.
3. $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{JC})$ est-elle une base de l'espace ?

N°80 p69

1. a. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- b. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC})$.
2. a. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- b. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{DI}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

79 1. A, B et C sont trois points non alignés, donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est une base du plan (ABC).

2. a. (AI) et (BC) sont sécantes en I, donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

Ainsi, $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC})$ est une base du plan (ABC).

b. $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de l'espace.

3. $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AI}$.

Puisque $\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont coplanaires, $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AI})$ n'est pas une base de l'espace.

80 1. a. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$.

2. a. $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

b. $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

N°81 p 67

81 ABCD est un tétraèdre.

On définit les points E, F et G par les égalités :

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DE} = \vec{0} ; \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CF} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}.$$

1. a. Que peut-on dire du point E ?
- b. À quels plans appartiennent les points F et G ? Justifier.
2. a. Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$.
- b. Exprimer $\overrightarrow{AF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- c. En déduire l'expression du vecteur $\overrightarrow{EF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
3. a. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
- b. En déduire que les points E, F et G sont alignés.

81 1. a. E est le milieu de [AD].

b. $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires, donc F appartient au plan (ABC).
 $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires, donc G appartient au plan (BCD).

2. a. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$.

b. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$.

3. a. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$.

b. $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{6} \overrightarrow{AD}$.

Puisque $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EF}$, les points E, F et G sont alignés.

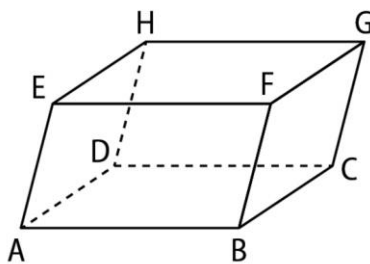
N°82 p 67

82 Soit les points A(3 ; 0 ; -1), B(5 ; 1 ; -2) et C(-3 ; 2 ; 3).

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

82 ABCD est un parallélogramme lorsque D a pour coordonnées (-5 ; 1 ; 4).

83 Soit les points $A(1; -2; 3)$, $B(1; 3; 2)$, $D(-2; -1; 2)$ et $E(3; 0; 6)$. Déterminer les coordonnées des points C , F , G et H de sorte que $ABCDEFGH$ soit un parallélépipède.



83 On a $C(-2; 4; 1)$, $F(3; 5; 5)$, $G(0; 6; 4)$ et $H(0; 1; 5)$.

Capacité 12 p 60

Démontrer la coplanarité de quatre points

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2; -1; 4)$, $B(6; -7; 0)$, $C(1; 0; 1)$ et $D(13; -16; 5)$.

- 1 Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- 2 Démontrer que les points A , B , C et D sont coplanaires.

Solution commentée

- 1 On a $\vec{AB}(4; -6; -4)$ et $\vec{AC}(-1; 1; -3)$.
Puisque $x_{\vec{AB}} = -4x_{\vec{AC}}$ mais $y_{\vec{AB}} \neq -4y_{\vec{AC}}$, il n'existe pas de réel t tel que $\vec{AB} = t\vec{AC}$.
Par conséquent, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- 2 Comme $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires, démontrer que les points A , B , C et D sont coplanaires revient à déterminer deux réels α et β tels que $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$.
Puisque $\vec{AD}(11; -15; 1)$, cela se traduit par le système :
$$\begin{cases} 4\alpha - \beta = 11 \\ -6\alpha + \beta = -15 \\ -4\alpha - 3\beta = 1 \end{cases}$$

On extrait les deux premières équations et on résout le système obtenu :
$$\begin{cases} 4\alpha - \beta = 11 \\ -6\alpha + \beta = -15 \end{cases}$$
 On remplace la deuxième équation par la somme des deux équations, le système équivaut à
$$\begin{cases} 4\alpha - \beta = 11 \\ -2\alpha = -4 \end{cases}$$
 On obtient alors $\alpha = 2$ et $\beta = -3$.
Il faut à présent s'assurer que la troisième égalité est vérifiée par ces valeurs :
 $-4\alpha - 3\beta = -4 \times 2 - 3 \times (-3) = 1$ ce qui convient.
Ainsi $\vec{AD} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ donc les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.
On en conclut que les points A , B , C et D sont également coplanaires.

Capacité 13 p 61

Montrer que des vecteurs de l'espace forment une base

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soit les vecteurs $\vec{u}(1; -3; 5)$, $\vec{v}(4; 2; 1)$ et $\vec{w}(0; 2; -1)$.

- 1 Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan.
- 2 Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

Solution commentée

- 1 $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
 k doit donc être solution du système
$$\begin{cases} 1 = k \times 4 \\ -3 = k \times 2 \\ 5 = k \times 1 \end{cases} \quad \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ k = -\frac{3}{2} \\ k = 5 \end{cases}$$

Puisque ce système n'a pas de solution, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base d'un plan.
- 2 Soit a , b et c trois réels tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Les coordonnées du vecteur $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ sont
$$\begin{pmatrix} a \times 1 + b \times 4 + c \times 0 \\ a \times (-3) + b \times 2 + c \times 2 \\ a \times 5 + b \times 1 + c \times (-1) \end{pmatrix} \text{ soit } \begin{pmatrix} a + 4b \\ -3a + 2b + 2c \\ 5a + b - c \end{pmatrix}$$

L'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à
$$\begin{cases} a + 4b = 0 \\ -3a + 2b + 2c = 0 \\ 5a + b - c = 0 \end{cases}$$

On a $a = -4b$.
 $-3 \times (-4b) + 2b + 2c = 0$ soit $14b + 2c = 0$ donc $c = -7b$ puis $\begin{cases} a = -4b \\ c = -7b \end{cases}$ puis $\begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
On en conclut que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

Capacité 14 p 61

Solution commentée

On cherche trois réels a , b et c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$. On a vu dans la capacité

précédente que le vecteur $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ a pour coordonnées
$$\begin{pmatrix} a + 4b \\ -3a + 2b + 2c \\ 5a + b - c \end{pmatrix}$$

L'égalité $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ est donc équivalente au système :
$$\begin{cases} a + 4b = -1 \\ -3a + 2b + 2c = -15 \\ 5a + b - c = 16 \end{cases}$$

donc à
$$\begin{cases} a = -1 - 4b \\ -3 \times (-1 - 4b) + 2b + 2c = -15 \\ 5 \times (-1 - 4b) + b - c = 16 \end{cases} \text{ ce qui équivaut à } \begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -19b - c = 21 \end{cases}$$

soit à
$$\begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -38b - 2c = 42 \end{cases}$$
 En remplaçant la troisième équation par la somme de la

deuxième et de la troisième, le système devient
$$\begin{cases} a = -1 - 4b \\ 14b + 2c = -18 \\ -24b = 24 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

On en déduit l'égalité $\vec{t} = 3\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}$, donc les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $(3; -1; -2)$.

Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base

D'après la capacité 13 précédente, les vecteurs $\vec{u}(1; -3; 5)$, $\vec{v}(4; 2; 1)$ et $\vec{w}(0; 2; -1)$ forment une base de l'espace.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}(-1; -15; 16)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

N°84 p 69

On considère les vecteurs $\vec{u}(-5; 6; -4)$, $\vec{v}(1; 0; -2)$ et $\vec{w}(0; 3; 5)$.

- Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base d'un plan.
- Démontrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

84 1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls tels que $y_{\vec{u}} = 0$ mais $y_{\vec{v}} \neq 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires : ils forment une base de plan.

2. Les coordonnées du vecteur $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ sont $\begin{pmatrix} -5a + b \\ 6a + 3c \\ -4a - 2b + 5c \end{pmatrix}$.

L'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} -5a + b = 0 \\ 6a + 3c = 0 \\ -4a - 2b + 5c = 0 \end{cases}$ soit à $\begin{cases} b = 5a \\ c = -2a \\ -4a - 10a - 10a = 0 \end{cases}$

donc à $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$.

Dès lors, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

N°95 p 69

On admet que les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 0)$, $\vec{v}(1; 1; 0)$ et $\vec{w}(1; 1; 1)$ forment une base de l'espace. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}(3; 1; 2)$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

95 On recherche trois réels a , b et c tels que $\vec{t} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

On résout le système $\begin{cases} a + b + c = 3 \\ b + c = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$.

Les coordonnées de $\vec{t}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sont $(2; -1; 2)$.

N°103 p 70

103 Soit $A(1; 0; 1)$, $B(3; 14; 9)$, $C(12; 5; 0)$ et $D(-2; 3; 4)$.

- Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
- Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

103 1. On a $\vec{AB}(2; 14; 8)$ et $\vec{AC}(11; 5; -1)$.

Puisque $x_{\vec{AB}} = -8x_{\vec{AC}}$ mais $x_{\vec{AB}} \neq -8x_{\vec{AC}}$, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

2. On a $\vec{AD}(-3; 3; 3)$.

Déterminons deux réels α et β tels que $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$. Pour cela, on résout le système :

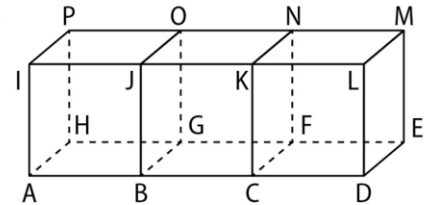
$$\begin{cases} 2\alpha + 11\beta = -3 \\ 14\alpha + 5\beta = 3 \\ 8\alpha - \beta = 3 \end{cases} \quad \text{Les première et troisième équations donnent} \quad \begin{cases} \beta = -\frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vérifions : $14\alpha + 5\beta = 14 \times \frac{1}{3} + 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 3$, ce qui convient.

Ainsi $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$, donc les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires. On en conclut que les points A, B, C et D sont également coplanaires.

N°108 p 70

108 La figure ci-contre est composée de trois cubes identiques.



- Sans justifier, donner les coordonnées de chacun des points de cette figure dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AH}, \vec{AI})$.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{DN}$, $\vec{AM}$ et $\vec{HC}$ dans ce repère.

3. Ces vecteurs sont-ils coplanaires ? Justifier.

108 1. $A(0; 0; 0)$ $E(3; 1; 0)$ $I(0; 0; 1)$ $M(3; 1; 1)$
 $B(1; 0; 0)$ $F(2; 1; 0)$ $J(1; 0; 1)$ $N(2; 1; 1)$
 $C(2; 0; 0)$ $G(1; 1; 0)$ $K(2; 0; 1)$ $O(1; 1; 1)$
 $D(3; 0; 0)$ $H(0; 1; 0)$ $L(3; 0; 1)$ $P(0; 1; 1)$

2. On a $\vec{DN}(-1; 1; 1)$, $\vec{AM}(3; 1; 1)$ et $\vec{HC}(2; -1; 0)$.

3. L'égalité $a\vec{DN} + b\vec{AM} + c\vec{HC} = \vec{0}$ équivaut à $\begin{cases} -a + 3b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$ soit à $\begin{cases} b + 3b + 2c = 0 \\ -c = 0 \\ a = -b \end{cases}$

donc à $\begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ a = 0 \end{cases}$.

Dès lors, $\vec{DN}$, $\vec{AM}$ et $\vec{HC}$ ne sont pas coplanaires.