

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements auront une part importante dans la notation de la copie. Changez de page pour chaque exercice ou problème (mais pas de copie). Pensez à inscrire le numéro de la question et de l'exercice. Numérotez vos pages. Encadrez les résultats finaux. Utilisez une règle.

Ce sujet comprend quatre exercices indépendants, et quatre pages. Vérifiez avant de composer que vous avez l'intégralité du sujet.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie, et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Exercice 1

On lance une pièce équilibrée indéfiniment, les lancers étant supposés indépendants. Cette expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Pour tout entier naturel n , on pose P_n l'évènement « Pile apparaît au $n^{\text{ème}}$ lancer » et F_n son complémentaire.

On note également, pour n entier naturel supérieur ou égal à 3 :

$$— B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$$

$$— U_n = \bigcup_{i=3} B_i$$

$$— u_n = \mathbf{P}(U_n).$$

1. Calculer $\mathbf{P}(B_n)$ pour tout $n \geq 3$.
2. a) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, les évènements B_n , B_{n+1} , et B_{n+2} sont incompatibles.
b) Sont-ils mutuellement indépendants ?
3. Calculer u_3 , u_4 , et u_5 .
4. a) Comparer, pour tout $n \geq 5$, les évènements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$.
b) En déduire une expression de $\mathbf{P}(U_n \cap B_{n+1})$ en fonction de u_{n-2} .
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est convergente.
6. Montrer que, pour tout $n \geq 5$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.
7. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

85 n° 3

Exercice 1.

1° Soit $n \geq 3$, $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.

$$P(B_n) = P(P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n)$$

$$= P(P_{n-2}) P(P_{n-1}) P(F_n)$$

indépendance des
événements.

$$P(B_n) = \frac{1}{8}, \text{ et ceci pour tout } n \geq 3.$$

2° a) Soit $n \geq 3$.

$$B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n, \quad B_{n+1} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } B_n \cap B_{n+1} &= (P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \cap (P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= (F_n \cap P_n) \cap (P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_{n+1}) \end{aligned}$$

associativité et
commutativité

Or: $F_n = \bar{P}_n$, donc $F_n \cap P_n = \emptyset$, et :

$$B_n \cap B_{n+1} = \emptyset$$

$$\text{De même: } B_n \cap B_{n+2} = F_n \cap P_n \cap \dots = \emptyset,$$

$$B_{n+1} \cap B_{n+2} = F_{n+1} \cap P_{n+1} \cap \dots = \emptyset.$$

Donc: (B_n, B_{n+1}, B_{n+2}) sont deux à deux incompatibles.

$$2^\circ b) \quad \underline{P(B_n \cap B_{n+1})} = 0 \quad \text{incompatibles}$$

$$\neq P(B_n) P(B_{n+1}) = \frac{1}{8},$$

donc les événements (B_n, B_{n+1}, B_{n+2}) ne sont pas mutuellement
indépendants, et ce quelque soit $n \geq 3$.

$$3^{\circ} \text{ et } \mathcal{A}_3 = P(U_3) = P(B_3) = \frac{1}{8} = \mathcal{A}_3.$$

(2)

$$\text{et } \mathcal{A}_4 = P(U_4). \text{ Or : } U_4 = B_3 \cup B_4.$$

$$\text{Donc : } P(U_4) = P(B_3 \cup B_4)$$

$$= P(B_3) + P(B_4)$$

incompatibilité, 1^{er} 2-2)

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}.$$

$$\mathcal{A}_4 = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } \mathcal{A}_5 = P(U_5). \text{ Or } U_5 = B_3 \cup B_4 \cup B_5. \text{ Donc :}$$

$$U_5 = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5)$$

$$= P(B_3) + P(B_4) + P(B_5)$$

incompatibilité, 1^{er} 2-2)

$$\mathcal{A}_5 = \frac{3}{8}$$

4^{re}) Soit $n \geq 5$. Alors $n-2 \geq 3$, et :

$$U_n \cap B_{n+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} B_i \right) \cap B_{n+1}$$

$$= \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} B_i \cup B_{n-1} \cup B_n \right) \cap B_{n+1}.$$

distributivité

$$= \left(\bigcup_{i=1}^{n-2} B_i \cap B_{n+1} \right) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$

$$= (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup \emptyset \cup \emptyset$$

incompatibilité,
1^{er} 2-2)

$$\underline{U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}}$$

4^{re}) On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$:

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2}) P_{U_{n-2}}(B_{n+1})$$

$$= \mathcal{A}_{n-2} P_{U_{n-2}}(B_{n+1})$$

Mais les événements sont indépendants, et l'événement U_{n-2} ne dépend

que des lancers 1 à $n-2$, quand B_{n+1} ne dépend (3)
que des lancers $n+1, n$, et $n-1$. Donc U_{n+1} et B_{n+1} sont
indépendants, et :
$$P(U_{n+1} \cap B_{n+1}) = P(B_{n+1}) = \frac{1}{8}.$$

Donc :
$$P(U_n \cap B_{n+1}) = \frac{1}{8} u_n.$$

5. On utilise la croissance de la probabilité pour l'inclusion.

Soit $n \geq 2$. Alors : $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$, donc :

$$U_n \subset U_{n+1}.$$

(Or, P est croissante pour l'inclusion,) donc :

$$P(U_n) \leq P(U_{n+1}).$$

Donc : $\forall n \geq 2$, $u_n \leq u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est croissante,
majorée par 1 (car suite de probabilités), donc convergente
par théorème de la limite monotone.

6. Soit $n \geq 5$. Alors :

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(U_n \cup B_{n+1}) && \text{(définition)} \\ &= P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) && \text{(formule de Poincaré)} \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} u_{n-2} && \text{(6-6)} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8} (1 - u_{n-2})$$
, et ceci pour tout $n \geq 5$.

7. Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (existe d'après 5).

Alors (opérations sur les limites + suites extraites convergent vers une même limite) : $l = l + \frac{1}{8} (1 - l)$, donc $l = 1$.

Exercice 2

Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n .

1.
 - a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto f(x)$ (on dressera son tableau de variations, en précisant les limites).
 - b) Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est correctement défini et strictement positif.

2. *Informatique.*

- a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while ..... :
        u=exp(-u)/u
        n=....
    return n
```

- b) On considère maintenant la fonction Python :

```
def fonc_2(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u>a :
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

Les appels `fonc_1(10**6)` et `fonc_2(10**(-6))` donnent respectivement 6 et 5.

Qu'en déduire pour u_5 et u_6 ?

Commenter ce résultat en une ligne.

- c) Écrire une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n .
3. Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose : $g(x) = e^{-x} - x^2$.
 - a) Démontrer que la fonction $g : x \mapsto g(x)$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1]$.
 - b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$, que l'on notera α .
 - c) Justifier que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$. On rappelle que $e \approx 2,7$.
 4.
 - a) Démontrer que l'on a : $u_2 > u_0$.
 - b) En déduire que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - c) Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 5. Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose : $h(x) = (f \circ f)(x)$. On pose également $h(0) = 0$.
 - a) Soit x un réel strictement positif. Déterminer $h(x)$.
 - b) Démontrer que la fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
 - c) Démontrer que l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x , admet exactement deux solutions sur $[0, +\infty[$ qui sont 0 et α , α étant le réel introduit à la question 3b.
 - d) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
 6. La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle majorée ? Admet-elle une limite ?

Solution de l'exercice 2

1. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a :

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2} < 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Ainsi f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- b) D'après le tableau de variations de f on a : $f(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$. Comme $u_0 > 0$, la suite (u_n) est donc correctement définie et à valeurs strictement positives.

2. *Informatique.*

- a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que l'appel `fonc_1(a)` renvoie le plus petit entier n tel que $u_n > a$.

```
def fonc_1(a):
    from numpy import exp
    u=1
    n=0
    while u<=a :
        u=exp(-u)/u
        n=n+1
    return n
```

- b) Les appels `fonc_1(10**(-6))` et `fonc_2(10**6)` calculent les termes successifs de la suite, mais la première fonction s'arrête lorsque $u < 10^{*-6}$ et la seconde lorsque $u > 10^{*6}$ nsert de compteur, il indique l'indice du dernier terme calculé.

Ainsi on a : $u_5 \leq 10^{-6}$ et $u_6 \geq 10^6$. De plus ce sont les premiers termes de la suite (u_n) à vérifier ces inégalités.

La suite (u_n) admet des termes consécutifs très éloignés : il est possible qu'elle ne converge pas.

- c) Une fonction Python qui a pour argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n peut-être :

```
def u(n):
    from numpy import exp
    u=1
    for k in range(1,n+1):
        u=exp(-u)/u
    return u
```

3. a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \geq 0$, on a $g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$. La fonction g est donc continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise alors une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$ puisque $g(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$.

- b) Pour $x > 0$ on a les équivalences :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Or d'après la question précédente 0 possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+$ par g . Ainsi l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x , possède une unique solution dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

- c) On a $g(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ et $g\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-1/e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e^{2-1/e} - 1}{e^2} > 0$ puisque $2 - \frac{1}{e} > 0$.

Ainsi on a : $g(1) < g(\alpha) < g\left(\frac{1}{e}\right)$, or comme g est strictement décroissante, g^{-1} aussi

et il vient :

$$1 > \alpha > \frac{1}{e}.$$

4. a) On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{e}$ et $u_2 = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{\frac{e-1}{e}}$.

Comme $\frac{e-1}{e} > 0$, il vient $e^{\frac{e-1}{e}} > 1$ et ainsi $u_2 = f(u_1) > 1$ donc $u_2 > u_0$.

- b) On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{2n+2} > u_{2n}$.

En appliquant la fonction f (qui est strictement décroissante) il vient $u_{2n+3} < u_{2n+1}$.

En appliquant à nouveau la fonction f , on obtient :

$$u_{2n+4} > u_{2n+2}.$$

Comme $u_2 > u_0$ on peut conclure par récurrence que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

- c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{2n+2} > u_{2n}$. En appliquant la fonction f (qui est strictement décroissante) il vient $u_{2n+3} < u_{2n+1}$ et ainsi la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus, d'après la question 1-b, elle est minorée par 0 : La suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \geq 0$.

5. a) On a :

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{e^{-f(x)}}{f(x)} = \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{\frac{e^{-x}}{x}} = x \frac{e^{-\frac{e^{-x}}{x}}}{e^{-x}} = x e^{x - \frac{e^{-x}}{x}} = x e^{x-f(x)}$$

- b) La fonction $h : x \mapsto h(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle. Puis : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Ainsi, par composition des limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = 0 = h(0)$, donc la fonction h est bien continue en 0.

- c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a les équivalences :

$$h(x) = x \Leftrightarrow x e^{x-f(x)} = x \Leftrightarrow x(1 - e^{x-f(x)}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x - f(x) = 0 \end{cases}$$

L'équation $h(x) = x$ n'admet donc que deux solutions sur $\mathbb{R}_+$: 0 et α .

- d) Avec les notations de la question 4-c, comme h est continue, on a $h(\ell) = \ell$. Ainsi, d'après la question précédente, on a $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$. Mais $\ell < u_1 = e^{-1} < \alpha$ d'après la question 3-c, il vient $\ell = 0$.

6. • Supposons que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée. Comme elle est croissante, elle converge vers un réel λ :

$$u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda.$$

Par continuité de la fonction f , il vient : $f(u_{2n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\lambda)$ i.e. $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\lambda)$.

Par unicité de la limite et la question 5-d, on obtient $f(\lambda) = 0$ ce qui est absurde puisque $f > 0$.

- La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée : comme elle est croissante on a $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 3

Soient $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ et $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux applications continues telles que $g \circ f = f \circ g$.
L'objectif de l'exercice est de montrer l'assertion suivante :

$$\exists c \in [0, 1], f(c) = g(c) \quad (*)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{[n]}$ la composée de f avec elle-même n fois : $f^{[n]} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f(g^{[n]}(x)) = g^{[n]}(f(x)).$$

2. Dans cette question, on suppose que la propriété **(**)** ci-dessus est vraie :

$$\exists m > 0, \forall x \in [0, 1], f(x) \geq g(x) + m.. \quad (**)$$

- a) Montrer que, si **(**)** est vérifiée, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f^{[n]}(x) \geq g^{[n]}(x) + nm.$$

- b) En déduire que l'assertion **(**)** est absurde.

3. On cherche maintenant à démontrer par l'absurde l'assertion **(*)**.

- a) Énoncer l'hypothèse initiale du raisonnement par l'absurde.
- b) Justifier brièvement que, sans perte de généralité, on peut supposer $f(0) > g(0)$.
- c) Montrer alors que nécessairement **(**)** est vérifiée.
- d) conclure.

Exercice 3.

(4)

Soyent $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ et $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continues, tels que $g \circ f = f \circ g$.

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f \circ g^{(n)}(x) = g^{(n)} \circ f(x).$$

Initialisation : $n=1$,

par l'hypothèse, $g \circ f = f \circ g$, et donc :

$$\forall x \in [0,1], g \circ f(x) = f \circ g(x).$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall x \in [0,1], f \circ g^{(n)}(x) = g^{(n)} \circ f(x)$.

Alors :

$$\forall x \in [0,1], g \circ f \circ g^{(n)}(x) = g \circ g^{(n)} \circ f(x) \quad \text{composition par } g$$

$$\forall x \in [0,1], f \circ g \circ g^{(n)}(x) = g^{(n+1)} \circ f(x) \quad \text{car } g \circ f = f \circ g$$

$$\forall x \in [0,1], \underline{f \circ g^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)} \circ f(x)}.$$

Donc, par principe de récurrence :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f^{(n)}(g(x)) = g^{(n)}(f(x))}$$

2. Supposons par l'absurde que :

$$\exists m > 0, \forall x \in [0,1], f(x) \geq g(x) + m \quad (**)$$

La 2) Montrons alors, sous l'hypothèse (**), par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f^{(n)}(x) \geq g^{(n)}(x) + nm.$$

Initialisation : $n=1$, c'est l'hypothèse (**).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall x \in [0,1], f^{(n)}(x) \geq g^{(n)}(x) + nm$ (H_{R_n})

Alors : Soit $x \in [0,1]$:

$$f^{(n+1)}(x) = f \circ f^{(n)}(x) \geq g^{(n)} \circ f(x) + nm \quad (\text{H}_{R_n}, x = f(x) \in [0,1])$$

Donc :

$$f^{(n+1)}(t) \geq g^{(n)} \circ f(t) + nm$$

or : $g^{(n)} \circ f = f \circ g^{(n)} \quad (g \circ 1)$, donc,

$$g^{(n)} \circ f(t) = f \circ g^{(n)}(t) \geq g \circ g^{(n)}(t) + m \quad \text{d'après (**)}$$

Donc :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &\geq g^{(n)} \circ f(t) + nm \\ &\geq f \circ g^{(n)}(t) + nm \\ &\geq g \circ g^{(n)}(t) + m + nm \end{aligned}$$

$$\underline{f^{(n+1)}(t) \geq g^{(n+1)}(t) + (n+1)m}$$

et ceci, pour tout $t \in [0, 1]$,

Donc : par principe de récurrence :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], f^{(n)}(x) \geq g^{(n)}(x) + nm}$$

2. b) Supposons (**) vérifiée. Soit $m > 0$ tel que : $\forall x \in (0, 1), f(x) \geq g(x) + m$
 Alors : pour $n = \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor + 1$ et $x = 0$, on en déduit, d'après 2-a) :

$$f^{(n)}(0) \geq g^{(n)}(0) + \underbrace{m \left(\left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor + 1 \right)}_{> 1 \text{ par définition de } \left\lfloor \frac{1}{m} \right\rfloor}$$

donc : $\underline{f^{(n)}(0) > 1}$

Or f est à valeurs dans $[0, 1]$, donc : $f^{(n)}(0) \leq 1$.

Contradiction. Donc (**) est fausse.

3. a) Supposons par l'absurde que (x) est fausse.

3. a) Alors : $\underline{\forall x \in [0, 1], f(x) \neq g(x)}$.

3. b) En particulier, pour $x = 0$: $f(0) \neq g(0)$.

Donc : soit $f(0) > g(0)$, soit $f(0) < g(0)$,

Mais les rôles de f et g étant symétriques, sans perte de généralité,

on peut s'étudier que la première situation.

3. c) Supposons non (*), et supposons de plus (quitte à échanger f et g) que $f(c) > g(c)$. (6)

Alors: la fonction $h: x \mapsto f(x) - g(x)$ est continue
 $(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$.

sur le segment $(0,1)$, et d'après 3. a) elle ne s'annule pas.

Donc (théorème des valeurs intermédiaires):

$$\forall x \in (0,1), \quad f(x) - g(x) > 0.$$

h est continue sur $(0,1)$, donc (bornes atteintes) elle admet un minimum. Soit $m = \min_{(0,1)} h > 0$ (d'après 3. a) toujours).

Alors: $\forall x \in (0,1), \quad f(x) - g(x) \geq m,$

$$\forall x \in (0,1), \quad f(x) \geq g(x) + m.$$

(**) est donc vérifiée.

3. d) On aboutit donc à une contradiction, car on sait que
(**) est en contradiction avec les hypothèses (2.6).

Donc: (*) est vérifiée:

$$\exists c \in (0,1), \quad f(c) = g(c).$$

Exercice 4

On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \geq 0 \text{ et, pour tout } n \geq 1, u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}.$$

1. Montrer que pour tout entier n , $u_n \geq \sqrt{n}$.

2. a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(1+x).$$

b) En déduire que pour tout entier n , $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

c) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0, puis en remarquant que, pour tout entier naturel non nul, $1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$, en déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3. Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = u_n - \sqrt{n}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{2} - x \leq \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right)$.

c) À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite L que l'on précisera.

4. a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, puis en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - u_{n-1})$.

b) Justifier alors qu'il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout entier $n \geq N_0$ on ait $u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.

c) Montrer que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1 + u_n - u_{n-1}$, puis que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

5. écrire en Python une fonction `suite(n)` qui prend en entrée un entier n et renvoie le terme d'indice n de la suite pour $u_0 = 1$. On prendra soin d'importer la ou les bibliothèques nécessaires.

Exercice 6.

(7)

$$u_0 \geq 0, \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n+1+u_{n-1}}.$$

NB: tout se passe notée que cette définition est équivalente

$$\tilde{a}: u_0 \geq 0 \text{ et : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}.$$

1. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq \sqrt{n}.$$

Initialisation: $u_0 \geq 0$.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n \geq \sqrt{n}$.

alors: $n+1+u_n \geq 0$, donc u_{n+1} existe, et :

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}. \quad \text{Or : } n+1+u_n \geq n+1 \quad (u_n \geq \sqrt{n} \geq 0)$$

par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}.$$

$$\text{Donc, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq \sqrt{n}.$$

$$2. a) \text{ Posons : } f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(1+x) - \sqrt{x}.$$

f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et :

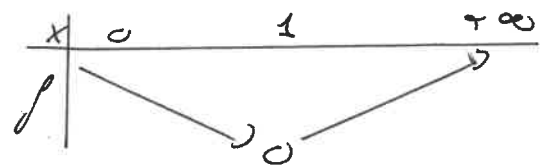
$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

Donc: f est décroissante sur $(0,1]$
croissante sur $[1, +\infty[$

admet un minimum en 1, et $f(1) = 0$

Donc: $\forall x \geq 0, f(x) \geq f(1) = 0.$

$$\forall x \geq 0, \frac{1}{2}(1+x) \geq \sqrt{x}$$



(8)

2-b) Montrons par récurrence en $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}.$$

Initialisation : $u_0 \leq u_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

Alors : $u_{n+1} = \sqrt{n+1 + u_n}$.

$$\leq \frac{1}{2}(n+1 + u_{n+1}) \quad (\text{d'après 2-a)})$$

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(n+2 + n + \frac{u_0}{2^n}\right) \quad (\text{par HR}_n)$$

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(2n+2 + \frac{u_0}{2^n}\right)$$

$$u_{n+1} \leq n+1 + \frac{u_0}{2^{n+1}}.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underline{u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}}.$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \underbrace{\frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{2^n n^2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}.$$

Donc, par encadrement :

$$\underline{\frac{u_{n-1}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

2-c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} \sqrt{n + u_{n-1}}$

$$\frac{u_n}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}.$$

Or : $\frac{u_{n-1}}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc : $\underline{\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}.$

(continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0^+)

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq \sqrt{n} \quad (9.1), \text{ donc } \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geq 1,$$

$$\text{et : } \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{n+u_{n-1}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}},$$

$$\text{donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underline{1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}}.$$

$$\text{Or : } \frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{donc : } \frac{u_{n+1}}{n} = \underbrace{\frac{u_{n+1}}{n+1}}_0 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par encadrement :

$$\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1} \text{ converge et : } \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1}.$$

$$\exists \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n - \sqrt{n}.$$

$$\text{3.a) Posons } f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}.$$

Dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et :

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 \right).$$

$$\text{Donc : } (f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \leq 1 \right) \Leftrightarrow (x \geq 0).$$

f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs : $f(0) = 0$,

$$\text{Donc : } \forall x \geq 0, \quad f(x) \leq f(0) = 0.$$

$$\forall x \geq 0, \quad \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}.$$

$$\text{Donc : } \underline{\forall x > 0, \quad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \leq \frac{1}{2}}.$$

erreur de l'énoncé :
diviser par 2x0, c'est
mal.

$$\text{De même, posons } g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + x^2.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et,

$\forall x \geq 0, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2} + 2x$. g' dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et (10)

$\forall x \geq 0, g''(x) = -\frac{1}{4(x+1)^{3/2}} + 2 \geq 0$.

Donc: g' est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $g'(0) = 0$, donc g' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $g(0) = 0$, donc: $\forall x \geq 0, g(x) \geq 0$, i.e.:

$\forall x \geq 0, \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + x^2 \geq 0$.

Donc: $\forall x > 0, \frac{1}{2} - x \leq \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

3+b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} w_n &= u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

$w_n = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right)$

3+c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2} - \frac{u_{n-1}}{n} \leq \frac{n}{u_{n-1}} \left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right) \leq \frac{1}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{gr 3-a)} \\ x = \frac{u_{n-1}}{n} \end{array} \right)$$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2} - \frac{u_{n-1}}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{u_{n-1}} \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right)}_{w_n} \leq \frac{1}{2}$$

Gr: $\frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (2-b) or $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ (2-c)

(Si besoin, rappelez que $\frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ - $\sqrt{\frac{n-1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
(Rappelez vous d'abord ça!))

Donc:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2} - \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} \right) \leq w_n \leq \frac{1}{2} \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Par encadrement: $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. $L = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 4.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} &= \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{n - n + 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\begin{aligned} \text{Aussi: } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n - u_{n-1} &= \sqrt{n+u_{n-1}} - u_{n-1} \\ &= w_n + \sqrt{n} - w_{n-1} - \sqrt{n-1}. \end{aligned}$$

$$u_n - u_{n-1} = w_n - w_{n-1} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Or: $w_n, w_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$, donc $w_n - w_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

et $u_n - u_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4.6) Par définition: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_\varepsilon, -\varepsilon < u_n - u_{n-1} < \varepsilon$.

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que:

$$\forall n \geq N_0, \quad -\frac{1}{2} < u_n - u_{n-1} < \frac{1}{2}$$

En particulier: $\forall n \geq N_0, \quad u_n \geq u_{n-1} - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 4.7) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n &= \sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1+u_n} - \sqrt{n+u_{n-1}})(\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}})}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+u_n - n - u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}$$

$$= \frac{1+u_n - u_{n-1}}{\sqrt{n+1+u_n} + \sqrt{n+u_{n-1}}}, \text{ dont le dénominateur est positif, et donc !}$$

$u_{n+1} - u_n$ est du signe de $1+u_n - u_{n-1}$.

$$\text{Donc: } \forall n \geq N_0, \quad 1+u_n - u_{n-1} \geq \frac{1}{2};$$

$$> 0$$

$$\forall n \geq N_0, \quad u_{n+1} - u_n > 0.$$

A partir d'un certain rang, la suite est croissante.

5+ ~~def suite(n):~~
~~import numpy as np~~
~~u = 1~~
~~for k in range(1, n+1):~~
~~u = np.sqrt(k+u)~~

def suite(n):
 import numpy as np
 u = 1
 for k in range(1, n+1):
 u = np.sqrt(k+u)
 return u