

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements auront une part importante dans la notation de la copie. Changez de page pour chaque exercice ou problème. Pensez à inscrire le numéro de la question et de l'exercice. Numérotez vos pages. Encadrez les résultats finaux. Utilisez une règle.

Ce sujet comprend un exercice et un problème indépendants, et cinq pages. Vérifiez avant de composer que vous avez l'intégralité du sujet.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie, et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

Les questions marquées d'une étoile * sont sensiblement plus délicates à traiter.

Exercice Calculs et raisonnements divers

1. Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par $f(t) = \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$.
 - a) Déterminer le domaine de définition maximal I de f .
 - b) Montrer que f définit une bijection de I dans un intervalle J que l'on explicitera.
 - c) Tracer, dans un même repère, le graphe de f et de sa bijection réciproque.
 - d) Expliciter la bijection réciproque f^{-1} .
2. Soient u et v les suites définies par $u_0 = 2, v_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - v_n, \quad v_{n+1} = u_n + 4v_n.$$

- a) Montrer que $u + v$ est une suite géométrique.
 - b) En déduire que la suite w de terme général $w_n = \frac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
 - c) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression explicite de v_n , puis de u_n .
3. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

- b) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes

$$C_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \text{ et } D_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}.$$

4.
 - a) Énoncer la définition d'une fonction croissante sur $[0; +\infty[$.
 - b) Énoncer l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$.
 - c) Montrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{1+x}$ est croissante.
 - d) Déduire des questions précédentes que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Problème

Le but de ce problème est d'appréhender la notion de *cardinal infini* en théorie des ensembles.

Définition 1. Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **équipotent** à F s'il existe une bijection de E dans F . On dira alors que ces deux ensembles ont même cardinal.

Préliminaires

1. Montrer que si E est équipotent à F , alors F est équipotent à E . On dira donc que E et F sont équipotents par la suite.
2. Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que si E et F sont équipotents et si F et G sont équipotents, alors E et G sont équipotents.

Partie I : Premiers exemples dans $\mathbb{R}$

3. On considère la fonction

$$f : \begin{cases} [0; 1] & \rightarrow [0; 2] \\ t & \mapsto 2t \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de f .
 - b) Montrer que f est une bijection. En déduire que le segment $[0; 1]$ est équipotent au segment $[0; 2]$.
4. a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, le segment $[a; b]$ est équipotent au segment $[0; 1]$. (Indication : on pourra essayer une fonction affine.)
b) En déduire que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$, le segment $[a; b]$ est équipotent au segment $[c; d]$.
c) Que dire si $a < b$ et $c = d$?
 5. Montrer que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$, les intervalles ouverts $]a; b[$ et $]c; d[$ sont équipotents.
 6. Montrer que $] - 1; 1[$ est équipotent à $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser un résultat du premier exercice.)
 - * 7. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} [0; 1] & \rightarrow [0; 1[\\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = \frac{1}{2^n} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est une bijection. (Indication : on pourra commencer par montrer qu'elle est bien définie, et chercher sa bijection réciproque.)

- ** 8. Montrer que $[0; 1]$ est équipotent à $]0; 1[$. En déduire que $[0; 1]$ est équipotent à $\mathbb{R}$.

Partie II : Ensembles dénombrables

Définition 2. Soit E un ensemble. On dira que E est **fini** si E est l'ensemble vide, ou s'il existe un entier n et une bijection de E sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Si existence, on admettra l'unicité d'un tel n , que l'on appelle *cardinal* de E , noté $\text{Card}(E)$. Par convention, $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Définition 3. Un ensemble E est dit **dénombrable** si il est équipotent à $\mathbb{N}$.

9. Soit E un ensemble fini, et $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ une application.

- a) Montrer que $f(E)$ est borné.
- b) En déduire qu'un ensemble fini n'est pas dénombrable.
- 10. a) Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable, ainsi que l'ensemble des entiers impairs.
- b) En déduire qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

On cherche maintenant à déterminer si $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

11. On définit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $a_n = \sum_{k=0}^n k = 1 + 2 + \dots + n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On définit l'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow \mathbb{N} \\ (p, q) & \mapsto g(p, q) = a_{p+q} + q \end{cases}$$

Les questions suivantes ont pour but de montrer que celle-ci est une bijection.

12. Soient $(p_1, q_1), (p_2, q_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $g(p_1, q_1) = g(p_2, q_2)$. On définit $S_1 = p_1 + q_1$, $S_2 = p_2 + q_2$.
- a) Montrer que

$$\frac{1}{2}S_1(1 + S_1) \leq g(p_1, q_1) \leq \frac{1}{2}S_2(1 + S_2) + S_2. \quad (1)$$

- b) Montrer que $S_2 \geq S_1$. (On pourra raisonner par l'absurde et obtenir une contradiction avec (1).)
- c) En déduire que $S_2 = S_1$.
- d) Conclure sur l'injectivité de g .
- 13. a) Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $g(p-1, q+1)$ en fonction de $g(p, q)$ si $p \neq 0$, et $g(q+1, 0)$ si $p = 0$.
- b) Montrer par récurrence que g est surjective.
- 14. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Partie III : Entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$

15. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a', b' \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \leq a' < b' \leq b \text{ et } x \notin [a'; b']. \quad (2)$$

Supposons maintenant que $\mathbb{R}$ est dénombrable.

16. Expliquer pourquoi cela signifie qu'il existe une suite ω telle que

$$\mathbb{R} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}. \quad (3)$$

17. On construit les suites (a_n) et (b_n) comme suit : on pose $a_0 = 0, b_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1}, b_{n+1} sont les réels construits par (2) tels que $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ et $\omega_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
- a) Montrer que les suites $(a_n), (b_n)$ sont monotones et bornées.
 - b) En déduire qu'elles sont convergentes. Soit $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

- c) Montrer que $\lambda, \mu \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$.
- d) En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Le caractère non dénombrable de $\mathbb{R}$ est la source d'une théorie foisonnante sur les cardinaux, menant notamment à la fameuse *hypothèse du continu* : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont deux ensembles infinis ; $\mathbb{R}$ est plus grand que $\mathbb{N}$ (au sens où ils ne sont pas équipotents) ; existe-t-il des ensembles de taille intermédiaire ?

La preuve présentée dans la troisième partie reprend le schéma donné initialement par Cantor en 1874. Il s'agit de la première preuve connue de ce résultat historique.