

Nom :

Prénom :

Question de cours : (1 pt)

1. Donner les quatre formes indéterminées.
2. Proposer un exemple de suite divergente qui ne tend pas vers $\pm\infty$.

Exercice 1. (4 pts)Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

a. $u_n = \frac{3n^2 - 1}{2n + 1}$ b. $u_n = \frac{2 - n\sin(n)}{n^2 + 1}$ c. $u_n = \frac{-3n^2 + 2n - 1}{2(n + 1)^2}$ d. $u_n = n + 1 - \cos n$

Exercice 2. (10 pts)On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

1. Calculer u_1 et u_2
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n) .
c. Compléter la fonction Python ci-dessous qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \geq A$.

```

1 def seuil(A):
2     u=0
3     n=0
4     while .....:
5         u=.....
6         n=n+1
7     return(...)
```

- d. Une réponse est-elle retournée quelle que soit la valeur de A ? Justifier.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$
5. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

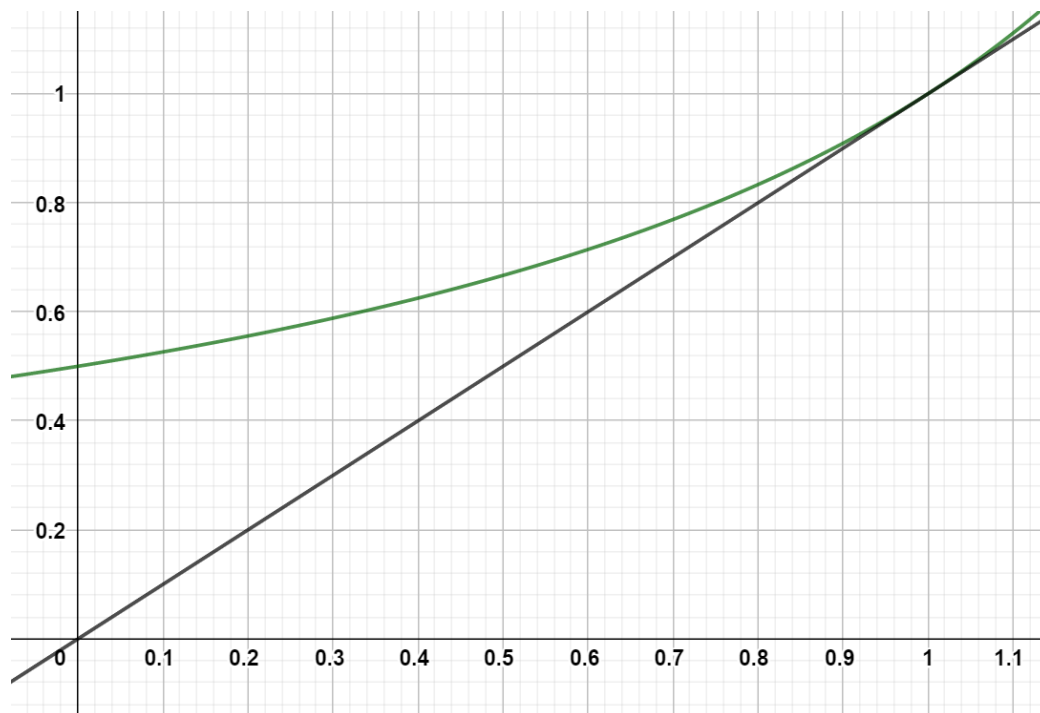
Exprimer S_n en fonction de n .*Indication : on décomposera S_n en trois sommes différentes, grâce à l'expression de u_n donnée.*

Exercice 3. (6 pts)

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

On donne ci-dessous une partie de la courbe représentative de la fonction f définie sur $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2-x}$ et la droite d'équation $y = x$.



1. Placer le point de coordonnées $(u_0; 0)$ puis utiliser cette courbe pour construire les points de coordonnées $(u_1; 0)$, $(u_2; 0)$, $(u_3; 0)$ et $(u_4; 0)$.
2. La suite semble-t-elle convergente ?
3. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . On donnera les résultats sous forme rationnelle.
4. Conjecturer la forme explicite de la suite (u_n) .
5. Démontrer cette conjecture par récurrence.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Enigme :

Calculer la valeur de :

$$\frac{1}{10^{-9} + 1} + \frac{1}{10^{-8} + 1} + \cdots + \frac{1}{10^8 + 1} + \frac{1}{10^9 + 1}$$