

Ex 1:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = \frac{n \left(3 - \frac{1}{n^2} \right)}{2 + \frac{1}{n}}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{n^2} = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$

donc par produit puis quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 - n \leq 2 - n \sin(n) \leq 2 + n$

donc $\frac{2-n}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{2+n}{n^2+1}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+n}{n^2+1} = 0$ (on factorise par n)

Donc par le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{n^2 \left(-3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} \right)} = \frac{-3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} = -3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} = 2$

Donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\frac{3}{2}$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq n$ puisque $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$

(7)

Ex 2:

1) $U_1 = 3U_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$

$U_2 = 3U_1 - 2 \times 1 + 3 = 10$

2) a) Soit $P(n)$ la ppte : " $u_n \geq n$ "

• $P(0)$ est vraie puisque $U_0 = 0 \geq 0$

• Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ pour lequel $u_k \geq k$, on a alors $u_{k+1} \geq 3k - 2k + 3 = k + 3$ qui est supérieur à $k+1$ donc la ppte est héréditaire et le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$.

b) Par comparaison on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

c) def suite(A):

$U = 0$

$n = 0$

while $< A$:

$U = 3U - 2n + 3$

$n = n + 1$

return (n)

d) Une réponse est toujours retournée puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: quel que soit le réel A , tous les termes de la suite seront dans $[A; +\infty[$ à partir d'un certain rang.

3) on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3$
 $= 2(u_n - n) + 3$

or $u_n \geq n$ donc $2(u_n - n) + 3 \geq 0$

alors (u_n) est croissante.

(2)

4) a) pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) + 1$$

$$= 3U_n - 2n + 3 - n - 1 + 1$$

$$= 3U_n - 3n + 3$$

$$= 3(U_n - n + 1)$$

$$= 3 v_n \text{ ainsi } (v_n) \text{ est géométrique de}$$

raison 3.

$$b) v_0 = U_0 - 0 + 1 = 1 \text{ donc pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = 3^n$$

$$\text{ainsi } U_n = v_n + n - 1$$

$$U_n = 3^n + n - 1$$

$$\begin{aligned} 5) S_n &= \sum_{k=0}^n U_k = \sum_{k=0}^n 3^k + k - 1 \\ &= \sum_{k=0}^n 3^k + \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 1 \\ &= \frac{1-3^{n+1}}{1-3} + \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - n - 1 \\ &= \frac{1}{2} (3^{n+1} + n^2 - n - 3) \end{aligned}$$

Ex 3:

1) Graphique en escalier : faire apparaître $U_0; U_1; U_2$ etc sur l'axe des abscisses.

(3)

2) La suite semble converger vers 1

$$3) \quad u_1 = \frac{1}{2 - u_0} = \frac{1}{2} \quad u_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad u_4 = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

4) On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{n+1}$

5). On a bien $u_0 = 0$ et $\frac{0}{0+1} = 0$

• Supposons qu'il existe un entier $k \geq 0$ pour lequel

$$u_k = \frac{k}{k+1} \quad \text{on a alors} \quad u_{k+1} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}}$$

$$\text{donc } u_{k+1} = \frac{1}{\frac{2(k+1) - k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$

La ppte est héréditaire donc le principe de récurrence permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

$$6) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

④