

34 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 10 & 3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Préciser la dimension de A .
2. Donner la valeur des coefficients a_{11} , a_{21} et a_{13} de la matrice A .

35 Soit la matrice $B = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = (i - 2j)$ à trois lignes et quatre colonnes.

1. Préciser la dimension de B .
2. Donner la valeur des coefficients b_{33} et b_{23} .
3. Représenter B sous la forme d'un tableau de nombres.
4. Écrire B^t sous la forme d'un tableau de nombres.

38 Soit les matrices $C = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ y-2 & 2x+1 & 3 \\ 0 & x+y & 5 \end{pmatrix}$ et

$$D = \begin{pmatrix} 2x+3 & 3y-2 & 1 \\ -1 & x-2 & 3 \\ 0 & x & 5 \end{pmatrix}.$$

Peut-on avoir $C = D$?

79 Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 2-x \\ 2x+3 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle valeur de x la matrice X est-elle égale à sa transposée ?

80 Pour chacun des cas suivants, écrire la matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$ correspondante.

- a) $n = 1$ et $p = 6$; $a_{ij} = i + j$
- b) $n = 5$ et $p = 5$; $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- c) $n = 3$ et $p = 2$; $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } j \text{ est pair} \\ j & \text{sinon} \end{cases}$
- d) $n = 10$ et $p = 10$; $a_{ij} = i - j$
- e) $n = 5$ et $p = 5$; $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

39 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Effectuer les calculs suivants.

- a) $A + B$
- b) $2A - B$
- c) $-\frac{1}{2}A + \frac{2}{3}B$

40 Déterminer si les calculs suivants sont possibles et donner le résultat le cas échéant.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} & \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

42 Effectuer les calculs suivants à la main et contrôler les résultats à la calculatrice.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \\ \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \\ \text{c) } \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 10 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 23 \end{pmatrix} & \end{array}$$

44 Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

- a) $A^2 = A$
- b) $A^2 = I_2$
- c) $AB = BA$ où $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

87 Déterminer deux matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

48 Dans chaque cas, déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & \text{b) } A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & \text{d) } A = \begin{pmatrix} -0,5 & 4 \\ 0,25 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

52 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Effectuer les calculs AB et AC .
2. Pourquoi peut-on en déduire que la matrice A n'est pas inversible ?

53 On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de N . N est-elle inversible ?

56 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$ et en déduire que A est inversible. Donner alors A^{-1} .

60 Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel.

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ z - x - y = -9 \\ 2y - x - z = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x - 5y - 2z = 2 \\ z - x + 4y = -1 \end{cases}$

95 On considère les matrices $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner P^{-1} et calculer $D = P^{-1}AP$.
2. Déterminer pour tout entier naturel n la matrice D^n . On pourra émettre une conjecture sur son expression puis la démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

96 On considère une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle

que $a + d = -1$ et $ad + bc = -2$.

On pose alors $E = \{\lambda A + \mu I_2; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

1. Démontrer que la somme de deux matrices de l'ensemble E est une matrice de E .
2. Vérifier que $A^2 = -A + 2I_2$. En déduire que A^{-1} appartient à E .
3. Démontrer que le produit de deux matrices de E est une matrice de E .

100 On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer U_n en fonction de U_0 , A et n .
2. a) Calculer A^2 et A^3 .
b) En déduire les valeurs de U_1 , U_2 et U_3 .

101 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}.$$

On définit la suite de matrices colonnes (U_n) par la relation $U_{n+1} = AU_n + B$, pour tout entier naturel n et par son premier

terme $U_0 = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice colonne C telle que $C = AC + B$.
2. On pose pour tout entier n , $V_n = U_n - C$.
a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.
b) En déduire par un raisonnement par récurrence que

$$V_n = A^n V_0, \text{ pour tout entier } n.$$

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{0,4^n}{3} + 2 \times \frac{0,1^n}{3} & \frac{0,4^n}{3} - \frac{0,1^n}{3} \\ 2 \times \frac{0,4^n}{3} - 2 \times \frac{0,1^n}{3} & 2 \times \frac{0,4^n}{3} + \frac{0,1^n}{3} \end{pmatrix}.$$

4. En déduire la valeur de U_n en fonction de n .

102 Pour chaque cas, déterminer l'opération matricielle associée à la transformation et calculer les coordonnées de l'image demandée.

a) A' l'image de $A(3; 7)$ par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) B' l'image de $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{6}\right)$ par la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) C' l'image de $C(1; \sqrt{3})$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

d) D' l'image de $D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ par rotation de centre O et

d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

106 On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On identifie chaque vecteur du plan $\vec{X}(x; y) \in \mathbb{R}^2$ à la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Effectuer le produit

$Y = PX$. Que peut-on dire du vecteur Y par rapport au vecteur X ? À quelle transformation du plan correspond la matrice P ?

2. On s'intéresse à la projection de vecteurs sur l'axe des ordonnées.

a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur du plan, donner le vecteur Y image de cette projection.

b) On admet qu'une telle transformation du plan peut être donnée par une matrice carrée d'ordre 2, que l'on notera P . En étudiant l'équation $Y = PX$ d'inconnue P , déterminer la matrice P représentative de la projection considérée.

3. En appliquant la méthode de la question précédente, déterminer la matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ correspondant à la projection sur la première bissectrice.

112 Éviter tout débordement

Un artiste doit installer une œuvre aquatique constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R. Au départ les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau.

Un système de canalisations devra permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- enfin, on ajoute 200 litres d'eau dans le bassin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

On considère les suites (a_n) et (b_n) désignant les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures.

On suppose pour cette étude que les bassins sont *a priori* suffisamment grand pour éviter tout débordement.

Pour tout entier n , on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Ainsi $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n + C$

où $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et préciser son inverse.

b) Montrer que PMP est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $M^n = PD^nP$.

d) En déduire que $M^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3 \times 0,5^n - 3 \times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$ pour

tout $n \geq 1$.

3. Montrer que la matrice $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ vérifie $X = MX + C$.

4. Pour tout entier naturel n , on définit la matrice V_n par $V_n = U_n - X$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = MV_n$.

b) On admet que $V_n = M^n V_0$ pour tout $n \geq 1$.

Montrer que $U_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$ pour

tout $n \geq 1$.

5. a) Montrer que la suite (b_n) est croissante et majorée. Déterminer sa limite.

b) Déterminer la limite de la suite (a_n) .

c) On admet que la suite (a_n) est croissante. En déduire la contenance des deux bassins A et B qui est à prévoir pour éviter tout débordement.

D'après Bac S, Liban 2019

129 Diagonaliser une matrice

A ► Un premier exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Pour x un nombre réel, on pose $f(x) = \det(A - xI_2)$.

a) Démontrer que f est une fonction polynomiale de degré 2.

b) Déterminer les racines λ_1 et λ_2 de $f(x)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

a) Justifier que les systèmes $(A - \lambda_1 I_2)X = 0$ et $(A - \lambda_2 I_2)X = 0$ admettent une infinité de solutions.

b) Déterminer alors une solution X_1 et une solution X_2 de chacun de ces systèmes.

3. On forme alors la matrice P , dont la première colonne est la matrice X_1 et la deuxième la matrice X_2 .

a) Démontrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

5. En déduire une expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

B ► Un deuxième exemple

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

et on pose $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 1$.

6. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on considère le système $(A - \lambda_1 I_3)X = 0$.

a) Établir que ce système est équivalent à $x + y + z = 0$.

b) Comment interpréter cette dernière équation dans l'espace $\mathbb{R}^3$?

c) Donner alors deux vecteurs sous forme de matrices colonnes engendrant le plan d'équation $x + y + z = 0$. On les notera X_1 et X_2 .

7. Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on considère le système $(A - \lambda_2 I_3)X = 0$.

a) Justifier que ce système admet une infinité de solutions.

b) Déterminer alors une solution X_3 de ce système.

8. On forme alors la matrice P , dont la première colonne est la matrice X_1 , la deuxième la matrice X_2 et la troisième la matrice X_3 .

a) Démontrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

On a ainsi pu écrire $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible. On dit que l'on a diagonalisé la matrice A . Cette diagonalisation n'est pas toujours possible.