

Exercice 1.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 9 \times 2^n + 5$.

Exercice 2.

Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} v_0 = 10 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + 6} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \leq v_n \leq 10$

Exercice 3.

La suite (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 \in]0 ; 1[\\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x(2 - x)$ est croissante sur $[0 ; 1]$.
- 2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$
- 3) En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 4.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = nu_n - 1$.

- 1) Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
- 2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1 + 0,5^n}{n}$.
- 3) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 4) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + 0,5^n(1 + 0,5n)}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 5.

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) u_n + \frac{6}{n+1} \end{cases}$$

1) a) Calculer u_1 ; u_2 et u_3

b) Soit la suite (d_n) définie par : $d_n = u_{n+1} - u_n$.

Écrire une fonction $p(n)$ en Python  donnant tous les termes :

- de 1 à n pour (u_n)
- de 0 à $(n - 1)$ pour (d_n)

c) Remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	5						
d_n							

Conjecturer la nature de la suite (d_n) .

2) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

3) Valider la conjecture émise à la question 1c).