

On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{9}{6 - v_n}$.

Partie A

1. Soit f la fonction telle que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Déterminer le sens de variation de f sur $[0;3]$.

b. On donne en annexe la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.

Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1 , v_2 , v_3 et v_4 sur l'annexe, à rendre avec la copie.

c. Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

d. Justifier que sa limite ℓ vérifie $\ell = \frac{9}{6 - \ell}$ puis déterminer la valeur de ℓ .

Partie B

On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

2. En déduire l'expression de w_n , puis celle de v_n en fonction de n .

3. Retrouver la limite de la suite (v_n) .

Partie C

Soit n un entier naturel non nul.

Compléter la fonction Python ci-dessous de sorte que la valeur retournée soit $\sum_{k=0}^n v_k$.

```
def Somme(n) :
```

```
    v=0
```

```
    S=0
```

```
    for k in range(.....):
```

```
        v=.....
```

```
        S=.....
```

```
    return .....
```

