

EXERCICE 1 :

7,5 points

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

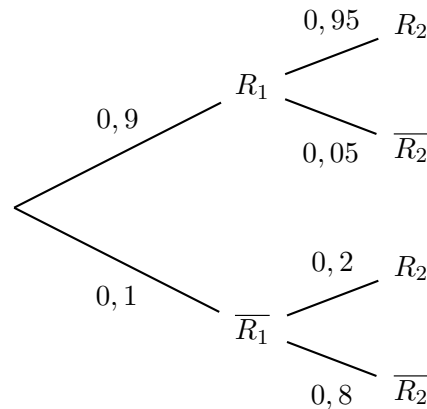
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- À l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n -ième semaine ».

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2 .

L'énoncé donne $p(R_1) = 0,9$; $p_{R_1}(R_2) = 0,95$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,2$.



- (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

On cherche $p(R_1 \cap R_2)$: $p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$

- (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.

On cherche $p(R_2)$

R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$p(R_2) = p(R_1 \cap R_2) + p(\overline{R_1} \cap R_2) = 0,855 + p(\overline{R_1}) \times p_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,855 + 0,1 \times 0,2 = 0,875$$

- (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?

On arrondira le résultat à 10^{-3} .

$$\text{On cherche } p_{R_2}(\overline{R_1}) \quad p_{R_2}(\overline{R_1}) = \frac{p(\overline{R_1} \cap R_2)}{p(R_2)} = \frac{0,02}{0,875} = \frac{4}{175} \approx 0,023$$

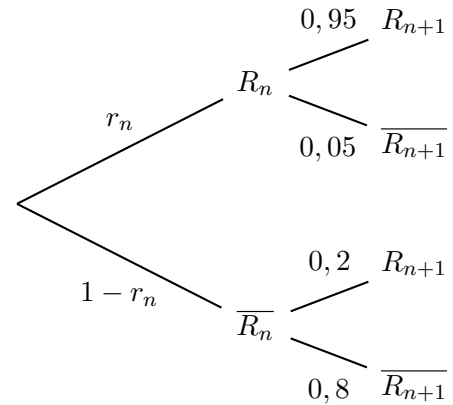
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.

(a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :

(b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p(R_{n+1}) \\ &= p(R_n \cap R_{n+1}) + p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) \\ &= p_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) + p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p(\overline{R_n}) \\ &= 0,95r_n + 0,2(1 - r_n) \\ &= 0,75r_n + 0,2 \end{aligned}$$



(c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

Soit P_n : $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : $r_1 = p(R_1) = 0,9$ et $0,1 \times 0,75^0 + 0,8 = 0,9$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel non nul tel que $r_k = 0,1 \times 0,75^{k-1} + 0,8$.

Alors $r_{k+1} = 0,75r_k + 0,2$ d'après la question précédente

$$\begin{aligned} &= 0,75 \left(0,1 \times 0,75^{k-1} + 0,8 \right) + 0,2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 0,1 \times 0,75^k + 0,6 + 0,2 \\ &= 0,1 \times 0,75^k + 0,8 \quad \text{donc } P_{k+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir de ce même rang donc, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 1$, soit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$

(d) Calculer la limite de la suite (r_n) .

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$|0,75| < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^{n-1} = 0 \text{ et par opération sur les limites on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0,8.$$

On en déduit qu'avec le temps, la probabilité pour un client de rendre la bouteille se stabilise à 0,8. L'agriculteur récupérera donc environ 80 % de ses bouteilles d'une semaine sur la suivante.

Partie A :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n - 1 > 0$.

Initialisation : $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$ donc la relation est vraie au rang 0 ;

Hérédité : Soit p un entier naturel tel que $u_p - 1 > 0$.

$$u_{p+1} - 1 = \frac{1 + 3u_p}{3 + u_p} - 1 = \frac{1 + 3u_p}{3 + u_p} - \frac{3 + u_p}{3 + u_p} = \frac{1 + 3u_p - 3 - u_p}{3 + u_p} = \frac{2(u_p - 1)}{3 + u_p}.$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$u_p - 1 > 0$ et comme $u_p > 1$, $3 + u_p > 4 > 0$ donc son inverse $\frac{1}{3 + u_p} > 0$ et finalement $\frac{2(u_p - 1)}{3 + u_p} > 0$, c'est-à-dire que $u_{p+1} - 1 > 0$. Donc la relation est héréditaire.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0, et elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n - 1 > 0$ soit $u_n > 1$.

2. (a) Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

Quel que soit le naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - u_n = \frac{1 + 3u_n - 3u_n - u_n^2}{3 + u_n} = \frac{1 - u_n^2}{3 + u_n} = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}.$$

- (b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

En déduire que la suite (u_n) converge.

On sait que quel que soit le naturel n , $u_n > 1 \Rightarrow u_n^2 > 1^2 \Rightarrow 1 - u_n^2 < 0$ et comme $3 + u_n > 0$ et finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc, par le théorème de convergence monotone, elle converge (vers une limite supérieure ou égale à 1).

Partie B : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère la fonction Python suivante :

```
def suite(n):
    u = 2
    for i in range(1,n+1):
        u = (1 + 0.5*u) / (0.5 + u)
    print(u)
```

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous par les valeurs obtenues lors de l'appel de `suite(3)`. Les valeurs de u seront arrondies **au millième**.

i	1	2	3
u	0,800	1,077	0,976

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

Il semble que la suite converge vers 1 par valeurs alternativement supérieures et inférieures.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - 1}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + 1} = \frac{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} - \frac{0,5+u_n}{0,5+u_n}}{\frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n} + \frac{0,5+u_n}{0,5+u_n}} = \frac{\frac{1+0,5u_n-0,5-u_n}{0,5+u_n}}{\frac{1+0,5u_n+0,5+u_n}{0,5+u_n}} = \frac{0,5-u_n}{1,5+u_n} \\ &= \frac{-0,5(u_n - 1)}{1,5(u_n + 1)} = -\frac{1}{3}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

(b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .

De plus, $v_0 = \frac{2-1}{2+3} = \frac{1}{3}$. Alors pour tout naturel n , $v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.

Par l'absurde, s'il existe un rang n tel que $v_n = 1$ alors $\frac{u_n - 1}{u_n + 1} = 1$ soit $u_n - 1 = u_n + 1$ ce qui est impossible. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$.

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \iff v_n(u_n + 1) = u_n - 1 \iff v_n u_n + v_n = u_n - 1 \iff$$

$$v_n u_n - u_n + 1 = -1 - v_n \iff u_n(v_n - 1) = -1 - v_n \text{ et comme } v_n \neq 1,$$

$$u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1} = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc d'après le résultat précédent $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

EXERCICE 3 :

3 points

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n , vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

Les affirmations suivantes sont-elles VRAIES ou FAUSSES? Justifier dans chaque cas.

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

$$\text{On a : } u_0 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 - 1 = 0 \text{ et } u_1 = \frac{3}{4}.$$

Donc il n'existe pas de nombre q tel que

$u_1 = qu_0$ donc u n'est pas géométrique.

Ceci suffit pour affirmer que la proposition est FAUSSE.

$$\text{De plus : } v_0 = 1 + 1 = 2 ; v_1 = \frac{5}{4} \text{ et } v_2 = \frac{17}{16}$$

$$\text{donc } \frac{v_1}{v_0} = \frac{5}{8} \text{ et } \frac{v_2}{v_1} = \frac{17}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{17}{20} \neq \frac{v_1}{v_0} \text{ donc}$$

v n'est pas géométrique non plus.

2. La suite (w_n) converge vers 1.

$$0 < \frac{1}{4} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ donc, par le théorème d'encadrement, (w_n) converge aussi vers 1. La proposition 2 est VRAIE.

3. La suite (u_n) est majorée par 2.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1 < 2$ donc u est majorée par 2 : VRAI

4. La suite (w_n) est croissante.

FAUX, par exemple, si pour tout n pair, $w_n = u_n$ et si pour tout n impair, $w_n = v_n$ alors w oscille autour de 1 et n'est donc pas monotone.