

TERMINALES

1 – 3 – 4 – 7 – 8 – 9 – 10

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

durée : 2h

calculatrices autorisées

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 :**7,5 points**

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.

On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.

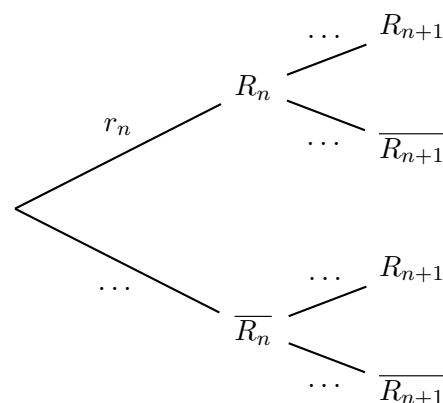
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- À l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est 0,9 ;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,95 ;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est 0,2.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n -ième semaine ».

1. (a) Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2 .
- (b) Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.
- (c) Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à 0,875.
- (d) Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
On arrondira le résultat à 10^{-3} .
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n -ième semaine. On a alors $r_n = p(R_n)$.

- (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :
- (b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.
- (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.
- (d) Calculer la limite de la suite (r_n) .
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



EXERCICE 2 : Les deux parties A et B sont indépendantes.**9,5 points****Partie A :**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n - 1 > 0$.
2. (a) Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.
(b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère la fonction Python suivante :

```
def suite(n):
    u = 2
    for i in range(1,n+1):
        u = (1 + 0.5*u) / (0.5 + u)
        print(u)
```

Reproduire et compléter le tableau ci-dessous par les valeurs obtenues lors de l'appel de `suite(3)`.
Les valeurs de u seront arrondies **au millième**.

i	1	2	3
u			

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,008 3	0,997 3	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
(b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .
4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.
(b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.
(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 3 :**3 points**

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout entier naturel n par $u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n , vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

Les affirmations suivantes sont-elles VRAIES ou FAUSSES ? Justifier dans chaque cas.

1. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
2. La suite (w_n) converge vers 1.
3. La suite (u_n) est majorée par 2.
4. La suite (w_n) est croissante.