

1) Soim/rédaction Correction du contrôle sur les congruences

2) Question de cours $a \equiv b(m)$ si $a - b$ est un multiple de m
(ou encore $a \equiv b(m)$ si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par m)

Exercice 1

- 1) $11 \equiv 4 \equiv -3 (7)$ donc $x = -3$ convient car $-3 \leq x < 4$ et $11 - (-3) = 14 = 2 \times 7$
2) $62 \equiv -1 (7)$ et $-3 \leq -1 < 4$ donc $x = -1$ convient car $62 - (-1) = 63$ est un multiple de 7
3) $-12 \equiv 2 (7)$ et $-3 \leq 2 < 4$ donc $x = 2$ convient car $-12 - 2 = -14$ est un multiple de 7 : $-14 = 7 \times (-2)$
4) $-47 \equiv 2 (7)$ et $-3 \leq 2 < 4$ donc $x = 2$ convient car $-47 - 2 = -49$ est un multiple de 7 : $-49 = 7 \times (-7)$

Exercice 2

- $39 \equiv 4 (7)$ (car $39 - 4 = 35 = 7 \times 5$)
On $4^3 \equiv 64 \equiv 1 (7)$ (car $64 - 1 = 63 = 7 \times 9$)
Or $60 = 3 \times 20$
donc $39^{60} \equiv 4^{60} \equiv 4^{3 \times 20} \equiv (4^3)^{20} \equiv 1^{20} \equiv 1 (7)$
donc le reste de la division euclidienne de 39^{60} par 7 est $\boxed{1}$ On $0 \leq 1 < 7$

Exercice 3

- 1) $11 \equiv 1 (5)$ (car $11 - 1 = 10 = 2 \times 5$)
et $7 \equiv 2 (5)$ (car $7 - 2 = 5 = 1 \times 5$)
donc $11x^2 - 7y^2 \equiv 1x^2 - 2y^2 \equiv x^2 - 2y^2$
On $11x^2 - 7y^2 = 5$ et $5 \equiv 0 (5)$ donc $x^2 - 2y^2 \equiv 0 (5)$ d'où $x^2 \equiv 2y^2 (5)$
- 2)

$x \equiv \dots (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots (5)$	$0^2 \equiv 0 (5)$	$1^2 \equiv 1 (5)$	$2^2 \equiv 4 (5)$	$3^2 \equiv 9 \equiv 4 (5)$	$4^2 \equiv 16 \equiv 1 (5)$

$y \equiv \dots (5)$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \dots (5)$	$2 \times 0^2 \equiv 0 (5)$	$2 \times 1^2 \equiv 2 (5)$	$2 \times 2^2 \equiv 3 (5)$	$2 \times 3^2 \equiv 3 (5)$	$2 \times 4^2 \equiv 2 (5)$
- 3) $x^2 \equiv 2y^2 (5)$ pour $x \equiv 0 (5)$ et $y \equiv 0 (5)$ uniquement c'est à dire pour x multiple de 5 et y multiple de 5
d'après les tableaux de congruence précédents
- 4) si x est un multiple de 5 il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5k$
si y est un multiple de 5 il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 5k'$
comme $11x^2 - 7y^2 = 5$ on a : $11 \times 25k^2 - 7 \times 25k'^2 = 5$
donc $25(11k^2 - 7k'^2) = 5$ donc 25 divise 5 impossible!
donc x et y ne peuvent pas être des multiples de 5 donc il n'y a pas de solution entière à l'équation (E)

Exercice BONUS

- Notons x le nombre de marches de l'escalier
 $x \equiv 1 (4)$ puisqu'il reste 1 marche à monter à Laure qui les monte 4 par 4
et $x \equiv 2 (3)$ puisqu'il reste 2 marches à monter à Ted qui les monte 3 par 3
comme $x \equiv 1 (4)$, $x - 1 \equiv 0 (4)$ donc $x - 1$ multiple de 4
on les multiples de 4 compris entre 246 et 260 sont : 248 ; 252 ; 256 ; 260
donc $x - 1 \in \{248 ; 252 ; 256 ; 260\}$ donc $x \in \{249 ; 253 ; 257 ; 261\}$
On $x \equiv 2 (3)$ donc $x - 2$ est un multiple de 3 ; $249 - 2 = 247$ n'est pas un multiple de 3
 $253 - 2 = 251$ n'est pas un multiple de 3, $257 - 2 = 255 = 3 \times 85$ donc c'est bien un multiple de 3
 $261 - 2 = 259$ n'est pas un multiple de 3
donc il y a 257 marches dans cet escalier.

Exercice BONUS 2

1) Écrire en base 4 le nombre 39 :

$$39 = 4 \times 9 + 3$$

$$9 = 4 \times 2 + 1$$

$$\text{donc } 39 = 4 \times (4 \times 2 + 1) + 3$$

$$= 4^2 \times 2 + 4^1 \times 1 + 3$$

donc l'écriture de 39 en base 4 est $\boxed{213}_4$

2) Écrire en base 10 le nombre $\overline{10011}_2$

$$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4$$

$$= 1 + 2 + 0 + 0 + 16 = \boxed{19}$$

L'écriture en base 10 du nombre $\overline{10011}_2$ est 19