

**23**   $(u_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_n = 2n^3 + 1.$$

- a) Tabuler les premiers termes de la suite à l'aide de la calculatrice.  
 b) Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$ .  
 c) Déterminer à l'aide de la calculatrice un entier naturel  $n$  tel que  $u_n \in ]10\,000; +\infty[$ .

**24**  $(v_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = n^2 + n.$$

- a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $x^2 + x > 10\,000$ .  
 b) En déduire un rang à partir duquel  $v_n > 10\,000$ .  
 c) Trouver de même un rang à partir duquel  $v_n > 10^9$ .  
 d) Conjecturer la limite de la suite.

**25** La suite  $(h_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$h_n = 6 - 2n.$$

A désigne un nombre réel quelconque.

- a) À partir de quel entier naturel  $n$  a-t-on :  
 •  $h_n < -10$  ?      •  $h_n < -100$  ?  
 b) À partir de quel entier naturel  $n$  a-t-on  $h_n < A$  ?  
 c) En déduire la limite de la suite  $(h_n)$ .

**29** **Algo**  python

La suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_n = -\sqrt{n^2 + 1}.$$

On donne le programme ci-contre écrit en langage Python.

- a) Expliquer son rôle.  
 b) Saisir ce programme et exécuter la fonction **Seuil** pour  $S = -100$ , puis pour  $S = -1\,000$ .  
 c) Conjecturer la limite de la suite  $(u_n)$ .

```
1 from math import *
2
3 def U(n):
4     y=-sqrt(n**2+1)
5     return y
6
7 def Seuil(S):
8     n=0
9     while U(n)>=S:
10         n=n+1
11     return n
```

**35**  $(e_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $e_n = \frac{10}{n+1}$ .

- a) Démontrer que pour tout  $n \geq 100$ ,  $-10^{-1} \leq e_n \leq 10^{-1}$ .  
 b) Déterminer à partir de quel entier naturel  $n$ ,  
 $-10^{-5} \leq e_n \leq 10^{-5}$ .  
 c) Conjecturer la limite de la suite  $(e_n)$ .

**36**  $(I_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $I_n = 5 - \frac{1}{n}$ .

- a) À partir de quel entier naturel  $n$ ,  $4,9 < I_n < 5,1$  ?  
 b) À partir de quel entier naturel  $n$ ,  $4,99 < I_n < 5,01$  ?  
 c)  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  désignent deux nombres réels.  
 Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  
 $5 - \alpha < I_n < 5 + \beta$  équivaut à  $5 - \alpha < I_n < 5$ .  
 d) Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  
 $5 - \alpha < I_n < 5$  équivaut à  $\frac{1}{\alpha} < n$ .  
 e) En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

**42**  La suite  $(h_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  par  $h_n = \sqrt{n^2 + n}$ .

- a) Tabuler les premières valeurs de la suite à l'écran de la calculatrice.  
 b) Conjecturer la limite de la suite  $(h_n)$ .  
 c) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_n \geq n$ .  
 d) Démontrer la conjecture émise à la question b).

**44**   $(c_n)$  est la suite définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $c_n = \frac{2^n}{n}$ .

- a) Tabuler la suite  $(c_n)$  à l'écran de la calculatrice et conjecturer sa limite.  
 b) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  
 $n^2 - 2n - 1 \geq 0$ .  
 c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  
 $2n^2 \geq (n+1)^2$ .  
 d) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  $2^n \geq n^2$ .  
 e) En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 4$ ,  $c_n \geq n$ .  
 f) Démontrer la conjecture émise à la question a).

**46** La suite  $(i_n)$  vérifie pour tout entier naturel  $n \geq 20$ ,  
 $-2 - \frac{1}{n} \leq i_n \leq -2 + \frac{3}{n}$ .

Démontrer que la suite  $(i_n)$  est convergente et préciser sa limite.

**50** Les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  vérifient pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_n \leq -n \leq n^3 b_n \leq 2n^2 \leq c_n.$$

- a) Démontrer que les suites  $(a_n)$  et  $(c_n)$  sont divergentes. Préciser leurs limites.  
 b) Démontrer que la suite  $(b_n)$  converge. Préciser sa limite.  
 c) Proposer un exemple de telles suites.

Pour les exercices 53 et 54, étudier la limite de chaque suite.

**53** a) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = n + n^2$ .

b) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = n\sqrt{n}$ .

c) Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $w_n = 2n - \frac{1}{n}$ .

d) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $h_n = \frac{1}{n^2 + 3}$ .

**54** a) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 8,2 - 4\sqrt{n}$ .

b) Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $v_n = \frac{4}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} + 1$ .

c) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n = (8 - n)(2n^2 + 1)$ .

d) Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $a_n = \left(5 - \frac{1}{n}\right)(2 - \sqrt{n})$ .

e) Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $b_n = \frac{4 + n}{2 - \frac{1}{n}}$ .

f) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $c_n = \frac{40}{2n + 3}$ .

**55**  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 4 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 6.$$

a) À l'aide d'une somme, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n = 10$ .

b) En déduire que  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.

c) Déterminer enfin la limite de la suite  $(v_n)$ .

Pour les exercices 58 à 60, déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  après avoir levé l'indétermination.

**58** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = -n^2 + 4n + 2$ .

**59** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$ .

**60** Pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{40n+1}{n^2+2}$ .

**74**  $(v_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = \frac{3e^n + 8e^{2n}}{e^n + e^{3n}}.$$

a) Justifier que pour tout  $n$ ,  $v_n = \frac{3e^{-n} + 8}{e^{-n} + e^n}$ .

b) En déduire la limite de la suite  $(v_n)$ .

**75** Une suite  $(u_n)$  converge vers un nombre réel  $\ell$ .

$(v_n)$  est la suite définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$

$$\text{par } v_n = 8u_n + \frac{2}{n+1} + 14.$$

a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est convergente et exprimer sa limite en fonction de  $\ell$ .

b) Déterminer la valeur de  $\ell$  sachant que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont la même limite.

**78**  $(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = 2u_n^2$ .

1. On suppose dans cette question que  $(u_n)$  est une suite convergente vers un nombre réel  $\ell$ .

a) Exprimer la limite de  $(2u_n^2)$  en fonction de  $\ell$ .

b) Utiliser l'unicité de la limite pour expliquer pourquoi  $\ell = 0$  ou  $\ell = 0,5$ .

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n \geq 1$ .

b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est divergente.

3. a) Peut-on changer le premier terme afin que la suite converge vers 0 ? Justifier.

b) Peut-on changer le premier terme afin que la suite converge vers 0,5 ? Justifier.

**80**  $(u_n)$  est la suite définie par  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1 + \frac{1}{1+2}$  et, pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n}.$$

1. Calculer les termes  $u_3$  et  $u_4$ .

2. Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on pose

$$v_n = \frac{1}{1+2+\dots+n}.$$

a) Démontrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ .

b) En déduire que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = 2 - \frac{2}{n+1}$ .

c) Étudier alors les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

d) Est-il vrai que : « La somme de  $n$  termes généraux qui tendent chacun vers 0 tend aussi vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  » ? Justifier.

Pour les exercices 82 à 84, déterminer une suite  $(v_n)$  de limite  $-\infty$  telle que  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang et indiquer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**82** Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = -\sqrt{n^2 + n}$ .

**83** Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = 1 - e^{12n}$ .

**84** Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $u_n = n \sin(n) - n^2$ .

**89**  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont les suites définies par :

$$u_n = 2^n \text{ et } v_n = n^2.$$

On se propose d'étudier la limite de la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ .

a) Déterminer le plus petit nombre entier naturel  $n \geq 2$  tel que  $2^n \geq n^3$ .

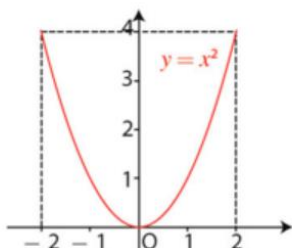
b) Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = 2x^3 - (x+1)^3$ .

c) À l'aide des questions a) et b), démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 10$ ,

$$2^n \geq n^3.$$

d) En déduire la limite de la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ .

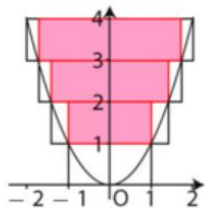
**95** Un créateur de parfum décide de commercialiser son nouveau produit dans des flacons ayant la forme suivante :



Cette forme, appelée parabolôïde, est obtenue par rotation de la parabole d'équation  $y = x^2$  autour de l'axe des ordonnées d'un repère orthonormé (unité : 1 cm). Le créateur souhaite calculer le volume  $V$ , en  $\text{cm}^3$ , de ce flacon.

**1. Un cas particulier :  $n = 4$**

Pour estimer la valeur de  $V$ , le créateur découpe l'intervalle  $[0; 4]$  de l'axe des ordonnées en quatre segments de même longueur.



Il obtient alors des rectangles « intérieurs » et « extérieurs » à la parabole, puis, par rotation autour de l'axe des ordonnées, des cylindres.

a) Justifier que les rayons des cylindres blancs sont respectivement égaux à  $\sqrt{4}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}$  et 1.

b) Montrer que  $6\pi \leq V \leq 10\pi$ .

**2. Cas général :  $n$  quelconque**

Pour  $n$ , nombre entier naturel non nul, on découpe l'intervalle  $[0; 4]$  en  $n$  segments de même longueur afin de généraliser la construction précédente.

On note  $u_n$  (resp.  $v_n$ ) la somme des aires des cylindres « intérieurs » (resp. « extérieurs »).

a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$u_n = \frac{16\pi}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1))$$

et 
$$v_n = \frac{16\pi}{n^2}(1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

b) En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$u_n = \frac{16\pi(n-1)}{2n} \text{ et } v_n = \frac{16\pi(n+1)}{2n}.$$

c) Quel est le volume  $V$  du flacon ?

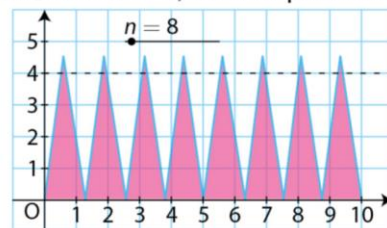
**106 Imaginer une stratégie**

**Raisonner Calculer**

La surface  $S_n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 1$ , est composée de  $n$  triangles identiques.

Sa base est 10 et sa hauteur est

$$4 + (-1)^n \frac{4}{n}.$$



Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $a_n$  et  $p_n$  l'aire et le périmètre de la surface  $S_n$ .

a) Quelle est la limite de la suite  $(a_n)$  ?

b) Quelle est la limite de la suite  $(p_n)$  ?

**111 Travailler l'oral en groupe**

Résoudre cet exercice en petit groupe, puis en présenter les résultats à l'oral.

**Rappel :** Pour tout réel  $x$ ,  $e^x \geq 1 + x$ .

a) En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , les inégalités suivantes sont vraies.

$$(1) e^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \quad (2) e^{-\frac{1}{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

b) En utilisant l'inégalité (1), démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$ .

c) En utilisant l'inégalité (2), démontrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

d) En déduire un encadrement de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , puis la limite de la suite  $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ .

**114 Les séries numériques**

$(u_n)$  est une suite définie sur  $\mathbb{N}$ .

$(S_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  c'est-à-dire  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

**1. Une condition nécessaire**

On suppose que la suite  $(S_n)$  converge et on note  $\ell$  sa limite.

a) Que vaut alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1}$  ?

b) Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer  $S_{n+1} - S_n$ .

c) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

On vient de démontrer ainsi que « Si la suite  $(S_n)$  converge, alors la suite  $(u_n)$  a pour limite 0 ».

Ceci équivaut par contraposée à « Si la suite  $(u_n)$  n'a pas pour limite 0, alors la suite  $(S_n)$  diverge ».

**2. Un exemple**

$(S_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{k+1}$ .

Démontrer que la suite  $(S_n)$  diverge.

### 3. Et la réciproque ?

On se propose de savoir si la proposition suivante est vraie ou fausse : « Si la suite  $(u_n)$  converge vers 0, alors la suite  $(S_n)$  converge ».

Pour cela, on considère la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

On suppose que la suite  $(S_n)$  converge vers un nombre réel  $\ell$ .

a) Quelle est alors la limite de la suite  $(S_{2n})$  ?

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$ .

b) Démontrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$  et en déduire que  $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$ .

c) Pourquoi cela est-il en contradiction avec le fait que la suite  $(S_n)$  converge ? Conclure.

### 115 Un exemple de série numérique

$(S_n)$  est la suite définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$

$$\text{par } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+2}{k^2(k+1)^2}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel  $k \geq 1$ ,

$$\frac{2k+2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}.$$

b) Justifier que pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$  et en déduire sa limite.

### 116 Un équivalent de $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

#### Définition

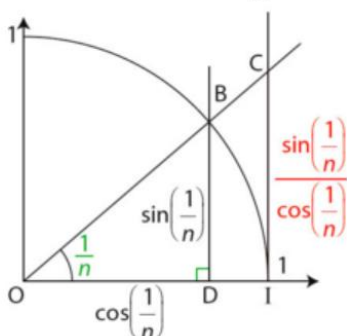
$(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites telles que  $(v_n)$  n'a aucun terme nul après un certain rang.

Dire que  $u_n$  et  $v_n$  sont **équivalents** signifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

$n$  est un nombre entier naturel,  $n \geq 1$ , tel que  $\frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ .

Dans un repère orthonormé d'origine O, on considère un secteur angulaire de mesure  $\frac{1}{n}$  rad.



a) Justifier en comparant des aires que :

$$0 \leq \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ .

c) En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)} \leq n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1.$$

d) Démontrer que pour tout réel  $x$  tel que  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x \leq \sqrt{x}$ .

e) Justifier finalement que  $1 - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$ .

f) Conclure que  $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$  est équivalent à  $\frac{1}{n}$ .

### 118 Le théorème de Césaro

$(u_n)$  est une suite définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  et qui converge vers 0.

Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ .

$\varepsilon$  est un nombre réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel  $N_1$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ ,  $|u_n| < 0,5\varepsilon$ .

b) Montrer qu'il existe un entier naturel  $N_2$  tel que pour tout  $n \geq N_2$ ,  $\frac{|u_1| + \dots + |u_{N_1}|}{n} < 0,5\varepsilon$ .

c) En déduire qu'à partir d'un certain rang,  $|v_n| < \varepsilon$ .

d) En déduire que la suite  $(v_n)$  converge et préciser sa limite.

## EXERCICE 18

---

Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 3$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_n + 3$ .

- 1) a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.  
b) Calculer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
- 2) On note  $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$  et  $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ 
  - a) Calculer  $S_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
  - b) Déterminer  $T_n$  en fonction de  $S_n$  et  $n$  puis en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ .