

38 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre ci-dessous.

a) $z_1 = -i + 2$

b) $z_2 = 1 + \sqrt{2} + i$

c) $z_3 = \sqrt{2} + 6$

d) $z_4 = e^2 \times i$

39 Déterminer si les nombres suivants sont des nombres réels, des nombres imaginaires purs ou des nombres complexes quelconques.

a) $z_1 = \frac{i}{2}$

b) $z_2 = 2 + i - 4 - i$

c) $z_3 = 3 + \sqrt{5}$

d) $z_4 = \frac{4 - 2i}{2}$

40 1. Donner la valeur de i^2 ; i^3 ; i^4 en fonction de i .

2. Déterminer la valeur de i^{50} .

3. Déterminer la valeur de $i^{2\,000}$.

44 1. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(1 + 3x) + i(2 - y) = 0.$$

2. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(3x + y - 5) + i(x - y + 7) = 0.$$

3. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(x + y) + i(2x - 3y) = 2 + i.$$

46 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \left(1 + \frac{1}{4}i\right) + (5 - i)$ b) $z_2 = (4 + 5i) - (3 + 2i)$

c) $z_3 = \left(\frac{1}{2} - i\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}i\right)$ d) $z_4 = \left(\frac{1}{2} - i\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}i\right)$

48 Calculer les produits suivants et donner le résultat sous forme algébrique.

a) $(\sqrt{2} + i) \times (1 + i\sqrt{3})$

b) $\left(\frac{3}{2} + 4i\right)\left(2 + \frac{1}{5}i\right)$

49 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = (2 + i)^2$

b) $z_2 = (2 - i)^2$

c) $z_3 = (2 + i)(2 - i)$

d) $z_4 = (2 + i)(i - 2)$

52 En posant $z = a + ib$, avec a et b deux réels, résoudre les équations suivantes.

a) $z \times i = 3 + i$

b) $z \times (1 + i) = 7 + 3i$

53 En posant $z = a + ib$, avec a et b deux réels, résoudre les équations suivantes.

a) $(4 + i) \times z = i$

b) $(i - 2) \times z = 3$

56 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \frac{5}{2i}$

b) $z_2 = \frac{1 - i}{2 + 3i}$

c) $z_3 = \frac{1 + i}{5 - 2i}$

d) $z_4 = \frac{3 + 2i}{2i - 5}$

61 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $iz = 1 - i$

b) $(2 + i)z = 1 + 3i$

63 Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants.

a) $\sqrt{7} + i\pi$

b) $3 + 5i + \sqrt{2}$

c) $\frac{4}{3} + 2$

d) $-i\sqrt{2}$

64 Soit z un nombre complexe. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants en fonction de $\bar{z}$.

a) $3z$

b) $z + 5 - i$

c) $z^2 + 2z$

d) $\frac{z + 1}{3}$

e) $iz + 2$

f) $\frac{i - z}{z + 1}$

65 Soit z un nombre complexe. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants en fonction de z et $\bar{z}$.

a) $2z - \bar{z}$

b) $z + \frac{1}{\bar{z}}$

c) $z^2 + \bar{z}^2$

d) $i\bar{z}$

e) $z + i\bar{z}$

f) $-2\bar{z}$

68 Soit z un nombre complexe. Déterminer si les nombres suivants sont des nombres réels, des nombres imaginaires purs ou des nombres complexes quelconques.

a) $z^2 + \bar{z}^2$

b) $z^2 - \bar{z}^2$

69 Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $\frac{z - \bar{z}}{z \times \bar{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

70 Résoudre les équations suivantes.

a) $\bar{z} = 2\bar{z} + 1$

b) $-\bar{z} = 1 + i$

c) $z + 5\bar{z} = 7 - 8i$

d) $z = 3\bar{z} + 5 - i$

73 Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b des réels, on pose $f(z) = 3\bar{z} + z - 5$.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de a et b .

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $f(z) = 2$

b) $f(z) = 4i$

c) $f(z) = z$

103 Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$Z = (z \times \bar{z} \times i)^3.$$

Déterminer si pour tout $z \in \mathbb{C}$, Z est un nombre réel, un nombre imaginaire pur, ou un nombre complexe quelconque.

105 Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$Z = \frac{z+1}{\bar{z}+1}.$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que le nombre Z soit :

- a) réel.
- b) imaginaire pur.

127 On définit la suite de nombres complexes (z_n) par

$$z_0 = 1 + 2i \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = 2iz_n + 5.$$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2 .
2. Conjecturer l'expression de z_n en fonction de n .
3. Démontrer par récurrence la conjecture faite en 2.
4. En déduire la valeur de z_{2020} .

128 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 1 - i$ et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{z_n}.$$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2 .
2. Conjecturer l'expression de z_n en fonction de n .
3. Démontrer par récurrence la conjecture faite en 2.

133 Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$

Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère les deux nombres complexes :

$$z = 7 + 2i \text{ et } z' = i - 3.$$

Déterminer la forme algébrique de :

- a) $z + z'$
- b) $z - z'$
- c) $z \times z'$
- d) z^2
- e) $\frac{1}{z}$

2. Pour tout nombre complexe z , on considère le nombre complexe :

$$Z = z^2 + 3 + \bar{z}^2 + z \times \bar{z}.$$

Montrer que pour tout nombre complexe z , Z est un nombre réel.

3. On considère le nombre complexe $z'' = \frac{8+i}{9-2i}$.

- a) Déterminer la forme algébrique de z'' .
- b) En déduire sans calcul la valeur de

$$\frac{8+i}{9-2i} + \frac{8-i}{9+2i} \quad \text{et de} \quad \frac{8+i}{9-2i} - \frac{8-i}{9+2i}.$$

129 Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (z_n) de nombres

$$\text{complexes par } \begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + i \end{cases}$$

1. a) Vérifier les égalités $z_1 = i$; $z_2 = (\lambda + 1)i$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)i$.
- b) Démontrer que, pour tout entier naturel n positif ou nul,

$$z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times i.$$

2. Étude du cas $\lambda = i$.

- a) Montrer que $z_4 = 0$.
- b) Pour tout entier naturel n , exprimer z_{n+4} en fonction de z_n .
- 3. a) On suppose maintenant qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a l'égalité $z_{n+k} = z_n$.
- b) Réciproquement, montrer que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n , on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$, alors $\lambda^k = 1$.

164 Somme et produit de complexes

1. Calculer i^n en distinguant plusieurs cas selon les valeurs de l'entier naturel n .

2. En déduire selon les valeurs de n , la valeur de :

- a) la somme $1 + i + i^2 + \dots + i^n$.
- b) le produit $1 \times i \times i^2 \times \dots \times i^n$.

169 Racines carrées d'un nombre complexe

Dans cet exercice, nous allons nous intéresser à la notion de racine carrée d'un nombre complexe.

1. Déterminer un nombre complexe dont le carré est égal à :

- a) 25 b) -1 c) -4

2. On veut déterminer un nombre complexe z dont le carré est égal à $5 + 12i$.

Poser $z = a + ib$ avec a et b deux réels, et résoudre l'équation $z^2 = 5 + 12i$.