

Corrigé du contrôle 1

Observations :	Note : / 20
----------------	--

Le barème est donné à titre indicatif.

Toutes les réponses doivent être justifiées et rédigées, sauf si une indication contraire est donnée.

Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même une trace de recherche. Elle sera prise en compte dans la notation.

(/4) Exercice 1

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

a. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

b. $-\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

c. $\pi \in \mathbb{R}$

j. $\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$

m. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

d. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

e. $\pi \notin \mathbb{Q}$

f. $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{N}$

k. $\frac{3}{5} \in \mathbb{D}$

n. $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$

g. $0,29 \in \mathbb{Q}$

h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

i. $\frac{72}{8} \in \mathbb{N}$

l. $2 \in \mathbb{R}$

o. $-3,5 \in \mathbb{D}$

(/3) Exercice 2

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

Affirmation 1 : La somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3.

Soit k et k' deux entiers naturels.

On a : $3k + 3k' = 3(k + k')$. Avec $k + k'$ qui est aussi un entier naturel.

Donc cette affirmation est vraie.

Affirmation 2 : De deux fractions, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.

Prenons $\frac{39}{40}$ et $\frac{1}{2}$

On a $\frac{39}{40} > \frac{1}{2}$ bien que $40 > 2$

Ce contre-exemple montre que cette affirmation est fausse.

Affirmation 3 : La différence entre deux nombres entiers naturels est un entier naturel.

$$2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$$

Ce contre-exemple montre que cette affirmation est fausse.

(/3) **Exercice 3**

Nous allons démontrer dans cet exercice que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde. Nous allons donc supposer que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, ce qui devrait nous mener à une contradiction à la fin.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Il existe donc deux entiers naturels a et n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$

1. En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par 10^n , montrer que l'on obtient $\frac{10^n}{3} = a$.

En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par 10^n , on a : $\frac{1}{3} \times 10^n = \frac{a}{10^n} \times 10^n$ c'est-à-dire $\frac{10^n}{3} = a$.

2. Le nombre a étant un entier naturel, que peut-on en déduire sur la divisibilité de 10^n par 3 ?

Or a est un nombre entier, ce qui signifie que 3 divise 10^n .

3. a. Que sait-on de la somme des chiffres d'un nombre divisible par 3 ?

Par ailleurs, un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

b. Quelle est la somme des chiffres de 10^n ?

Le nombre 10^n est constitué du chiffre 1 suivi de n chiffres 0. Donc la somme des chiffres de 10^n est 1.

c. Est-il donc possible que ce nombre 10^n soit divisible par 3 ?

La somme des chiffres de 10^n est 1, qui n'est pas un multiple de 3. Donc 10^n n'est pas divisible par 3.

4. Que peut-on alors en déduire pour le nombre $\frac{1}{3}$?

Donc, l'hypothèse de départ " $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal" nous mène à une contradiction. On en déduit donc qu'elle est fausse.

Et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

(/3,5) **Exercice 4**

1. Écrire les expressions suivantes sans valeur absolue.

a. $|5,7| = 5,7$

b. $\left| -\frac{15}{7} \right| = \frac{15}{7}$

c. $|\sqrt{19} - 4| = \sqrt{19} - 4$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$|x - 3| = 7$$

$$x - 3 = 7 \text{ ou } -x + 3 = 7$$

$$x = 10 \text{ ou } x = -4$$

$$S = \{-4; 10\}$$

$$|-2x + 7| = 9$$

$$-2x + 7 = 9 \text{ ou } 2x - 7 = 9$$

$$-2x = 2 \text{ ou } 2x = 16$$

$$x = -1 \text{ ou } x = 8$$

$$S = \{-1; 8\}$$

(/3) **Exercice 5** Méli-mélo

1. Calculer l'expression suivante en détaillant les calculs :

$$7 + \frac{\frac{1}{3} - \frac{8}{5}}{\frac{9}{4} \times \frac{5}{7}}$$

$$\begin{aligned} 7 + \frac{\frac{1}{3} - \frac{8}{5}}{\frac{9}{4} \times \frac{5}{7}} &= 7 + \frac{-\frac{19}{15}}{\frac{45}{28}} \\ &= 7 + \left(-\frac{19}{15}\right) \times \frac{28}{45} \\ &= 7 - \frac{532}{675} \\ &= \frac{4193}{675} \end{aligned}$$

2. Écrire les expressions suivantes sous la forme x^p où p est un entier relatif.

a.

$$\frac{(x^8)^3}{x^{-7}}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x^8)^3}{x^{-7}} &= \frac{x^{24}}{x^{-7}} \\ &= x^{31} \end{aligned}$$

b.

$$\frac{x^{-5} \times x^3}{(x^{-12})^{-4}}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^{-5} \times x^3}{(x^{-12})^{-4}} &= \frac{x^{-2}}{x^{48}} \\ &= x^{-50} \end{aligned}$$

(/3,5) **Exercice 6**

1. Le nombre 71 est-il premier ? Justifier.

Le nombre 71 n'admet que deux diviseurs : 1 et lui-même. C'est donc un nombre premier.

2. Donner la liste de tous les diviseurs de 12 puis de 16.

Les diviseurs de 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Les diviseurs de 16 sont : 1, 2, 4, 8, 16.

3. Deux entiers naturels sont dits amiables si chacun est égal à la somme des diviseurs, autre que lui-même, de l'autre.

a. Montrer que 12 et 16 ne sont pas amiables.

D'une part, on a : $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$.

D'autre part, on a : $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

La somme des diviseurs de 12 (autres que lui-même) n'est pas égale à 16. Donc ces deux nombres ne sont pas amiables.

b. Montrer que 220 et 284 sont amiables.

La liste des diviseurs de 220 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, et 220.

La liste des diviseurs de 284 sont : 1, 2, 4, 71, 142 et 284.

D'une part, on a : $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$.

D'autre part, on a : $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

La somme des diviseurs de 220 (autres que lui-même) est pas égale à 284. Donc ces deux nombres sont amiables.

Exercice bonus

Cet exercice n'est pas pris en compte dans le barème indiqué sur 20 et ne peut que rapporter des points en plus.

Quelle est la valeur de $\left(\left(\left(\left(2023^{1-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{3}}\right)^{1-\frac{1}{4}}\right)^{\vdots}\right)^{1-\frac{1}{2023}}$?

$$\begin{aligned} \left(\left(\left(\left(2023^{1-\frac{1}{2}}\right)^{1-\frac{1}{3}}\right)^{1-\frac{1}{4}}\right)^{\vdots}\right)^{1-\frac{1}{2023}} &= \left(\left(\left(\left(2023^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^{\vdots}\right)^{\frac{2022}{2023}} \\ &= 2023^{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2021}{2022} \times \frac{2022}{2023}} \\ &= 2023^{\frac{1}{2023}} \end{aligned}$$