

Corrigé DS n° 1

EXERCICE 1 6 pts

1. On cherche a et b tel que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -3$

• $f(0) = a = 1$

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{b(x^2 + 1) - 2x(bx)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{b - bx^2}{(x^2 + 1)^2}$$

d'où $f'(0) = b = -3$

• bilan : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2 + 1}$

2,25 pts

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{3x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 1}$

0,5 pts

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$

0,5 pts

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$(x^2 + 1)^2$		+	+	+
$3x^2 - 3$		+	0	-
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$

1,25 pts

4. La droite $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur -3 . Donc on cherche x tel que $f'(x) = -3$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3 &\iff \frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2} = -3 \\ &\iff 3x^2 - 3 = -3((x^2 + 1)^2) \\ &\iff 3x^2 - 3 = -3(x^4 + 2x^2 + 1) \\ &\iff 3x^2 - 3 = -3x^4 - 6x^2 - 3 \\ &\iff 3x^4 + 9x^2 = 0 \\ &\iff 3x^2(x^2 + 3) = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \text{ ou } x^2 = -3 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

Donc Le seul point de $\mathcal{C}_f$ en lequel la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$ est le point d'abscisse 0.

Or on a $f(0) = 1$. Donc cela correspond bien au point $J(0; 1)$.

1,5 pts

EXERCICE 2 4,5 pts

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 6 = \frac{6n - 2}{n + 1} - 6 = \frac{-8}{n + 1} < 0$
Donc on a bien $u_n < 6$ pour tout entier n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - (-2) = \frac{6n - 2}{n + 1} + 2 = \frac{8n}{n + 1} \geq 0$$

Donc on a bien $u_n \geq -2$ pour tout entier n .

Bilan : pour tout entier n , on a : $u_n \in [-2; 6[$

2,5 pts

2. Etude du sens de variation de la suite :

— **Méthode 1** : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n &= \frac{6(n+1) - 2}{n+2} - \frac{6n - 2}{n+1} \\ &= \frac{(6n+4)(n+1) - (n+2)(6n-2)}{(n+2)(n+1)} = \dots = \frac{8}{(n+2)(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

— **Méthode 2** : étude des variations sur $I = [0; +\infty[$ de la fonction f telle que $u_n = f(n)$

On a $f(x) = \frac{6x - 2}{x + 1}$

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{6(x+1) - (1)(6x-2)}{(x+1)^2} = \frac{8}{(x+1)^2} > 0$$

f est croissante sur I , donc la suite (u_n) est croissante.

2 pts

EXERCICE 3 4,5 pts

$$\begin{aligned} \bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n &= \frac{-3n^2 + 1}{2n^3 + n^2 + 2} = \frac{n^2 \left(-3 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^3 \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} \right)} = n \times \frac{-3 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3}} \\ \text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n^2} \right) &= -3, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} \right) = 2, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty \end{aligned}$$

d'où (par produit et quotient) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$

1,5 pts

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{2n + \sqrt{n}}{1 - 3\sqrt{n}} = \frac{n \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{\sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 3 \right)} = \sqrt{n} \times \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 3}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n}) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 3 \right) = -3$$

d'où (par produit et quotient) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = -\infty$

1,5 pts

- $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$

d'où, pour tout entier n : $w_n \leq 1 - 2024n$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 2024n) = -\infty$

d'où (par comparaison) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = -\infty$

1,5 pts

EXERCICE 4 3,5 pts

- Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

d'où : $2 \geq -2\cos(n) \geq -2$

$$-2 \leq -2\cos(n) \leq 2$$

$$5 \leq 7 - 2\cos(n) \leq 9$$

$$\frac{1}{5} \geq \frac{1}{7 - 2\cos(n)} \geq \frac{1}{9} \quad (\text{fonction inverse décroissante sur }]0; +\infty[)$$

$$\frac{3n-2}{5} \geq \frac{3n-2}{7-2\cos(n)} \geq \frac{3n-2}{9} \quad (\text{car } 3n-2 > 0 \text{ pour } n \geq 1)$$

Donc on a bien, pour tout $n \geq 1$: $u_n \geq \frac{3n-2}{9}$

- Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n-2}{9} \right) = +\infty$

on en déduit par comparaison que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = +\infty$ et donc que cette suite n'est pas majorée.

2 pts

1,5 pts

EXERCICE 5 3,5 pts

Soit $P(n)$ la proposition : $t_n = \frac{n}{n+1}$

- $P(0)$ est vraie car on a bien : $\frac{0}{0+1} = 0 = t_0$

- Supposons que $t_n = \frac{n}{n+1}$ pour un entier n donné quelconque.

$$\text{d'où : } t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{d'où : } t_{n+1} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{d'où : } t_{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{d'où : } t_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ainsi on a montré que : $P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie

- Bilan : on a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{n}{n+1}$

EXERCICE 6 9 pts

Partie A

- Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

0,75 pts

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

$$\begin{aligned} \text{(a) } v_{n+1} &= u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550 \\ &= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$.

2 pts

- On en déduit que, pour tout n , on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

1 pts

- $-1 < 0,85 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,85^n) = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3000$

Le nombre de collaborateurs en télétravail va se stabiliser vers 3000 au bout d'un grand nombre de mois.

0,5 pts

Partie B

- f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $] -2, +\infty[$.

1 pt

$$\forall x \leq 0, f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

$f'(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. (a) Soit $\mathcal{P}$ la propriété $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

• **Initialisation**

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = \frac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$, soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 0$

c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc sur $[0 ; 4]$,
donc de la relation $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$,

on déduit $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$.

$$\text{Or } f(0) = \frac{4}{2} = 2 \geq 0; f(u_n) = u_{n+1}; f(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } f(4) = \frac{24}{6} = 4$$

On a donc : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$

On a donc montré que si la propriété est vraie à un rang n , alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$,
donc, d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout n ,
on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

2 pts

(b) La suite (u_n) est croissante et bornée.

0,5 pts

3. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$; or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la suite

$\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 4.$$

1 pts

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers
sur les 5 000 que compte l'entreprise.

0.25 pts