

DS N° 2.

Exercice 1 1) cf cours p 2
2) cf cours p 11.

Exercice 2:

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \left(\frac{10}{7} \right)^n = -\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^{n+1} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} + \frac{1}{n^2} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \frac{(-1)^n}{n} = 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-5}{2} \right)^n \text{ n'existe pas} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{5} \right)^n = 0$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n} = \frac{3^n \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right)}{2^n \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right)} = \left(\frac{3}{2} \right)^n \times \frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0 \quad \text{par somme} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3^n} - 1 \right) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad \text{par somme} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^n} + 1 \right) = 1$$

$$\text{par quotient} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{1}{3^n} - 1}{\frac{1}{2^n} + 1} \right) = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = +\infty \quad \text{car } \frac{3}{2} > 1$$

$$\text{Donc par produit} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\frac{-1}{n+2} \leq \frac{(-1)^n}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+2} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

En utilisant le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

$$\forall m \in \mathbb{N},$$

$$-1 \leq \sin(m) \leq 1$$

$$m^2 - 1 \leq m^2 + \sin(m) \leq m^2 + 1$$

$$\frac{m^2 - 1}{m + 5} \leq c_m \leq \frac{m^2 + 1}{m + 5}$$

$$\text{or } \frac{m^2 - 1}{m + 5} = \frac{m^2 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}{m \left(1 + \frac{5}{m}\right)} = m \times \left(\frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 + \frac{5}{m}}\right)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} = 0 \text{ donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = 1 \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{m}\right) = 1$$

$$\text{par quotient: } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 + \frac{5}{m}}\right) = 1$$

$$\text{par produit } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{m^2 - 1}{m + 5}\right) = +\infty$$

En utilisant le théorème de comparaison on obtient:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} c_m = +\infty.$$

Exercice 3:

- 1) L'effectif des cétarés au 31 octobre 2017 est de $3000 + 80$, c'est à dire 3080. Entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, une baisse de 5% a lieu, l'effectif au 1^{er} juin 2018 est donc:

$$u_1 = 3080 \times 0,95 = 2926.$$

- 2) En généralisant, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0,95 \\ &= 0,95 u_n + 76 \end{aligned}$$

- 3) Dans la cellule C2 : $= 0,95 * B2 + 76$

- 4) a) Soit (P_n) la proposition: pour tout entier naturel n ,
 $u_n \geq 1520$

• Initialisation: $u_0 = 3000 \geq 1520$ donc $P(0)$ est vraie

• Hérédité: Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie c'est à dire $u_n \geq 1520$ montrons que $P(n+1)$ est vraie c'est à dire $u_{n+1} \geq 1520$

Par hypothèse de récurrence,

$$u_n \geq 1520$$

$$\begin{aligned} 0,95 u_n &\geq 0,95 \times 1520 && \downarrow \times 0,95 > 0 \\ &&& \downarrow + 76 \end{aligned}$$

$$0,95 u_n + 76 \geq 1520$$

$$u_{n+1} \geq 1520$$

$P(n+1)$ est vraie

• Conclusion: P_n est vraie pour $n=0$, elle est héréditaire donc pour tout entier n , $u_n \geq 1520$

$$b) \forall m \in \mathbb{N},$$

$$\begin{aligned} u_{m+1} - u_m &= 0,95 u_m + 76 - u_m \\ &= -0,05 u_m + 76 \end{aligned}$$

D'après la question précédente $u_m \geq 1520$

$$\text{donc } -0,05 u_m \leq -0,05 \times 1520$$

$$-0,05 u_m \leq -76$$

$$-0,05 u_m + 76 \leq 0$$

$$\text{donc } u_{m+1} - u_m \leq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

La suite (u_m) est décroissante.

c) La suite (u_m) est décroissante et minorée par 1520 donc elle est convergente

$$\begin{aligned} 5)a) \forall m \in \mathbb{N}, \quad v_{m+1} &= u_{m+1} - 1520 \\ &= 0,95 u_m + 76 - 1520 \\ &= 0,95 u_m - 1444 \\ &= 0,95 \left(u_m - \frac{1444}{0,95} \right) \\ &= 0,95 (u_m - 1250) \\ &= 0,95 v_m \end{aligned}$$

La suite (v_m) est donc géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme

$$v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$$

$$b) \forall m \in \mathbb{N}, \quad v_m = v_0 \times q^m = 1480 \times 0,95^m$$

$$\text{et } u_m = v_m + 1520 = 1480 \times 0,95^m + 1520$$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ car $0 < 0,95 < 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1480 \times 0,95^n + 1520) = 1520$ par produit et somme de limites.

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1520}$

6.) def baleines():

$\mu = 3000$

$n = 0$

while $\mu > 2000$:

$\mu = 0,95 * \mu + 76$

$n = n + 1$

return (n)

7.) $u_{21} = 1480 \times 0,95^{21} + 1520 \approx 2024$

$u_{22} = 1480 \times 0,95^{22} + 1520 \approx 1998$

À la 22^e année la réserve fera 1998 en 2039

Exercice 4: $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

$u_1 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$u_2 = \sum_{k=2}^4 \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$

$u_3 = \sum_{k=3}^6 \frac{1}{k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20}$

La suite semble décroissante et minorée par 0

$\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}u_{m+1} - u_m &= \sum_{k=m+1}^{2(m+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k} \\&= \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} - \sum_{k=m}^{2m} \frac{1}{k} + \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+1} \\&= \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{m} \\&= \frac{m(2m+1) + m(2m+2) - (2m+2)(2m+1)}{m \times (2m+1) \times (2m+2)} \\&= \frac{2m^2 + m + 2m^2 + 2m - 4m^2 - 4m - 2m - 2}{m \times (2m+1)(2m+2)} \\&= \frac{-3m - 2}{m(2m+1)(2m+2)} < 0\end{aligned}$$

La suite est donc décroissante à partir du rang 1

De plus pour tout entier naturel m , $u_m > 0$
comme somme de nombres strictement positifs

La suite est décroissante et minorée par 0
donc elle converge.