

Nom, Prénom :

Le sujet est à rendre avec la copie

Exercice 1 ROC

4 points

- Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli :
Pour tout entier naturel n et tout réel a strictement positif,
 $(1 + a)^n \geq 1 + na$
- En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que pour tout réel $q > 1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Exercice 2

9 points

- Compléter, sans justifier, dans le tableau ci-dessous les limites éventuelles ou indiquer n'existe pas

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 \left(\frac{10}{7} \right)^n = \dots$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^{n+1} = \dots$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} + \frac{1}{n^2} = \dots$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{(-1)^n}{n} = \dots$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5}{2} \right)^n = \dots$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{5} \right)^n = \dots$

- Déterminer, en justifiant très soigneusement, les limites des trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) définies pour tout entier naturel n respectivement par :

$$a_n = \frac{1 - 3^n}{1 + 2^n}; b_n = \frac{(-1)^n}{n + 2} \text{ et } c_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n + 5}$$

Exercice 3

14 points

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2017 + n . On a donc $u_0 = 3 000$.

- Justifier que $u_1 = 2 926$.
- Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
- À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

- Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1 520$.
- Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
- Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1\,520$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
6. Recopier et compléter la fonction Python suivante pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
def baleines():
    u=...
    n=...
    while .....:
        u=....
        n=....
    return(....)
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice 4

3 points

Toute trace de recherche correcte même non aboutie sera valorisée

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$