

Activité d'introduction

Grégoire a pris des cours de tirs à l'issue desquels la probabilité qu'il atteigne sa cible est $p = \frac{3}{4}$.

1) On suppose qu'il fait deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès obtenus. ($X = 0, 1$ ou 2)

Calculer la probabilité des événements $[X = 0]$, $[X = 1]$ et $[X = 2]$. (On pourra s'aider d'un arbre pondéré et on désignera par S les succès et E les échecs).

2) On suppose maintenant qu'il fait six tirs et on note Y le nombre de succès obtenus. ($Y \in \{0 ; 1 ; \dots ; 6\}$)

On voudrait calculer la probabilité de l'événement $[Y = 4]$.

a) Peut-on encore facilement raisonner à l'aide d'un arbre ?

b) Calculer la probabilité qu'il commence par quatre succès suivis de deux échecs.

c) Mais les succès et les échecs n'apparaissent pas nécessairement dans cet ordre. Parmi les "mots" de six lettres qui ne contiennent que des S et des E , combien contiennent exactement quatre fois la lettre S ?

d) En déduire la probabilité de l'événement $[Y = 4]$.

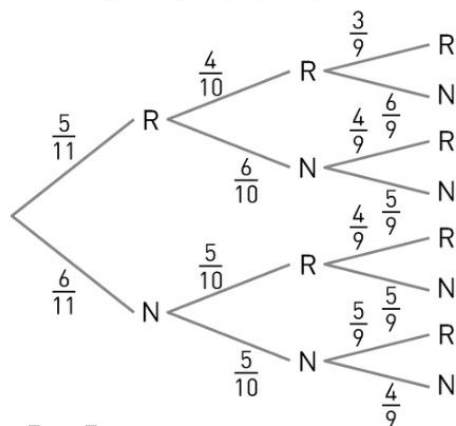
N°1

1. 1. a) Oui : on remet la boule tirée dans l'urne donc sa composition est identique à chaque tirage.

b) Les tirages sont indépendants donc

$$p([R ; N ; N]) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{180}{1331} \approx 0,135.$$

2. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne donc sa composition change à chaque tirage : les tirages ne sont pas indépendants.



$$\frac{5}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{33} \approx 0,152.$$

N°2

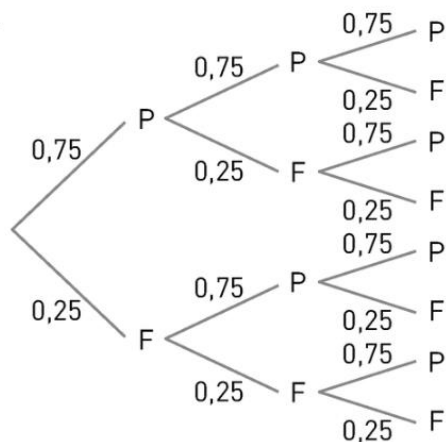
40. 1. En considérant qu'un succès est « Le TGV arrive à l'heure » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli.

2. La probabilité d'un succès est $p = 0,879$.

N° 3

3. 1. On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli (en considérant qu'un succès est obtenir « PILE » par exemple) identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,75$.

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement un succès est $3 \times 0,75 \times 0,25^2 = 0,140\,625$ (4^e, 6^e et 7^e chemins).

N°4

4. 1. Toutes les parties sont indépendantes.

2. Si on fait un arbre, il y a un seul chemin correspondant à 5 parties perdues et toutes les pondérations inscrites dessus sont 0,9 donc cette probabilité est $0,9^5 = 0,590\,49$.

On peut aussi utiliser la formule générale pour une succession d'épreuves indépendantes
 $p(E; E; E; E; E) = p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(E) = 0,9^5$.

N°5

5. 1. X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à « obtenir FACE ») de paramètre $p = 0,5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$.

$$\begin{aligned} \mathbf{2.} \quad p(X = 11) &= \binom{20}{11} \times 0,5^{11} \times 0,5^{20-11} \\ &= \binom{20}{11} \times 0,5^{20} \approx 0,16 \end{aligned}$$

N°6

8. 1. $p(Y < 24) = p(Y \leq 23) \approx 0,15$

2. $p(21 < Y < 25) = p(Y \leq 24) - p(Y \leq 21) \approx 0,26$

N°7

39. En considérant qu'un succès est « L'élève a choisi la spécialité mathématiques » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli, avec la probabilité d'un succès $p = 0,71$.

Remarque : Il est tout aussi légitime de considérer qu'un succès est « L'élève n'a pas choisi la spécialité mathématiques » auquel cas, $p = 0,29$.

N°9

55. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des 10 passagers est « le passager s'est endormi », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 10$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« le passager s'est endormi ») est $p = 0,68$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,68$.

$$2. \bullet p(X = 8) = \binom{10}{8} \times 0,68^8 \times 0,32^2 \approx 0,211$$

$$\bullet p(X = 9) = \binom{10}{9} \times 0,68^9 \times 0,32^1 \approx 0,099$$

$$\bullet p(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0,68^{10} \times 0,32^0 \approx 0,021$$

$$3. \text{ On cherche } p(X \geq 8) = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) \\ \approx 0,211 + 0,099 + 0,021 \\ = 0,331.$$

Remarque : On peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées de la calculatrice.

N°11

82. 1. On considère qu'un bit mal transmis est un succès, sa probabilité est $p = 0,01$. X donne donc bien le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 8$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,01$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,01$.

$$2. p(X = 2) \approx 0,003$$

$$3. p(X \geq 3) \approx 0,00005 \text{ ce qui paraît en effet négligeable.}$$

N°13

N°8

47. `random.random()` renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1 donc cette fonction renvoie 0 avec une probabilité 0,41 et 1 avec une probabilité 0,59 donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,59$.

N°10

61. G suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,1$.

$$a) p(G > 100) \approx 0,473$$

$$b) p(G < 85) \approx 0,049$$

$$c) p(95 \leq G \leq 105) \approx 0,438$$

$$d) p(90 < G < 110) \approx 0,684$$

N°12

Y1 BinomFRép(45, 0.78, X)

29	0.0264		
30	0.0537		
31	0.1006	38	0.8936
32	0.1734	39	0.9507

$$97. a) p(X \geq k) > 0,9 \Leftrightarrow p(X \leq k - 1) < 0,1$$

On trouve $k - 1 = 30$ puis $k = 31$.

$$b) p(X \geq k) \geq 0,05 \Leftrightarrow p(X \leq k - 1) \leq 0,95$$

On trouve $k - 1 = 38$ puis $k = 39$.

91. • T suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6$.

• R suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$.

a) • $p(T \geq 10) \approx 0,872$;

• $p(R \geq 10) \approx 0,939$;

donc si 10 répétitions sont nécessaires, il faut privilégier Rob.

b) • $p(T \geq 15) \approx 0,126$;

• $p(R \geq 15) \approx 0,035$;

donc si 15 répétitions sont nécessaires, il faut privilégier Tristane (mais dans les deux cas, ces événements sont improbables).