

Activité 1 : Introduire le raisonnement par récurrence

$$1. 2\,000 \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 2\,000$$

Donc en 2021, il y aura 2 000 films sur la plateforme.

$$2\,000 \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 2\,000$$

Donc en 2022, il y aura 2 000 films sur la plateforme.

2. D'après la question 1., on peut croire cette publicité, et penser qu'il y aura toujours 2 000 films sur la plateforme.

$$3. a) u_0 = 2\,000 ; u_1 = 2\,000$$

$$3. a) u_0 = 2\,000 ; u_1 = 2\,000$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 0,9u_n + 200$$

c) On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,000$

4. a) P_0 : « $u_0 = 2\,000$ ». Donc P_0 est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 2\,000$.

$$\text{Or } u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 200$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 0,9 \times 2\,000 + 200 = 2\,000$$

Donc P_{n+1} est vraie.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,000$.

Donc en 2050, il y aura 2 000 films à la disposition des clients.

Exemple 2:

Intéressons-nous aux nombres entiers positifs et impairs, et plus précisément à la somme des n plus petits d'entre eux, soit à :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1)$$

Emettre une conjecture puis la démontrer par récurrence

(doc de M Kissi)

On calcule les premiers termes :

$$S_1 = 1 ; S_2 = 1 + 3 = 4 ; S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 ; S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 ; S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

On constate d'emblée que les résultats constituent les carrés des premiers entiers.

$$S_1 = 1^2 ; S_2 = 2^2 ; S_3 = 3^2 ; S_4 = 4^2 ; S_5 = 5^2.$$

Il est dès lors très tentant d'induire de ces cas particuliers une propriété générale :

$$P(n) : \text{« } S_n = n^2 \text{ »}$$

Mais la propriété est-elle vraie pour tous les entiers $n \geq 1$? ce qui implique une infinité de cas.

Seule une démonstration mathématique va permettre de répondre de façon positive à cette dernière question, car il est impossible de vérifier toutes les possibilités.

Voici comment procéder « par récurrence ».

La propriété « $S_n = n^2$ » est vraie au rang $n = 1$. Autrement dit, le raisonnement a été **initialisé**, on sait renverser un domino ou encore on sait monter sur l'un des barreaux de l'échelle. Sinon (la propriété n'est vérifiée pour aucun entier n), on s'arrête là !!!

Supposons désormais que la propriété est vraie au rang n , un entier quelconque et fixé, autrement dit, $S_n = n^2$ est vraie et on regarde alors ce que vaut la somme des $n + 1$ premiers entiers impairs.

On peut écrire :

$$S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = S_n + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1, \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$\text{Ainsi, } S_{n+1} = (n + 1)^2.$$

On vient de démontrer que le fait que la propriété soit vraie au rang n **entraîne** le fait qu'elle le soit au rang $n + 1$. Autrement dit, la propriété est **héréditaire**, on sait que la chute d'un domino entraîne la chute du suivant ou encore on sait passer d'un barreau de l'échelle au suivant.

Les deux conditions (**initialisation** et **hérédité**) sont réunies, on peut donc conclure que pour tout $n \geq 1$, on a $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Ainsi l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout entier n positif est vraie. Il ne reste plus, si on peut dire, qu'à utiliser cet argument le nombre de fois souhaité. De cette manière, il est permis de construire cette chaîne d'implications :

$$[S_1 = 1] \Rightarrow [S_2 = 2^2] \Rightarrow [S_3 = 3^2] \dots \Rightarrow [S_{n-1} = (n-1)^2] \Rightarrow [S_n = n^2].$$

Comme la première égalité de cette chaîne est vraie, la dernière l'est tout autant

Exemple 3:

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n < 6$

On note $P(n)$ la propriété à démontrer

Initialisation : $u_0 = -2 < 6$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier n tel que $P(n)$ soit vraie on veut montrer que $P(n+1)$ est vraie

Supposons qu'il existe un entier n tel que $u_n < 6$ c'est-à-dire $u_n < 6$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_n &< \frac{1}{2} \times 6 \\ \frac{1}{2}u_n + 3 &< 3 + 3 \\ u_{n+1} &< 6 \end{aligned}$$

La proposition $P(n+1)$ est vraie

Donc la propriété $P(n)$ est **héréditaire**

Conclusion :

On a $P(n)$ initialisée et héréditaire donc par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 6$

Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

Démontrer par récurrence que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ». **1 2**

Étape ① Initialisation Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$

Donc $S_1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Étape ② Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n \times (n+1)}{2} + n+1 = \frac{n \times (n+1) + (n+1) \times 2}{2} = \frac{(n+1) \times (n+2)}{2} \quad \mathbf{3}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Étape ③ Conclusion On conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Conseils & Méthodes

- 1** Il faut tout d'abord identifier la propriété à démontrer par récurrence.
- 2** Une démonstration par récurrence se fait en trois étapes : initialisation, hérédité, puis conclusion.
- 3** On utilise l'hypothèse de récurrence.

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

Démontrer par récurrence que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété

$$P(n) : \ll S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg.$$

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1^2 = 1$ et

$$\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1.$$

$$\text{Donc } S_1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1) \quad n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{donc } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

37. Soit x un réel quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $|x^n| = |x|^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $|x^0| = |1| = 1$ et $|x|^0 = 1$.
Donc $|x^0| = |x|^0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $|x^{n+1}| = |x^n \times x|$

$$= |x^n| \times |x|$$

$$= |x|^n \times |x|$$

$$= |x|^{n+1}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.

38. 1. Si $n = 1$, alors $n^2 < 2n$.

Donc Jason a tort.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie.
Donc $n^2 > 2n$.

$$\text{On a } (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 2n + 2n + 1.$$

$$\text{Or } n \geq 1, \text{ donc } 2n \geq 2.$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 2 + 2n + 1.$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 2(n+1) + 1$$

$$\text{donc } (n+1)^2 > 2(n+1)$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

b) $0^2 = 0$ et $2 \times 0 = 0$. Donc $0^2 = 2 \times 0$.

Donc $P(0)$ n'est pas vraie.

c) Le plus petit entier n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie est 3. ($3^2 > 2 \times 3$)

d) Il faut donc corriger l'affirmation de Jason :
pour tout entier $n \geq 3$, $n^2 > 2n$.

40. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « 4 divise $5^n - 1$ »

Initialisation : pour $n = 0$,

$$5^0 - 1 = 0. \text{ 4 divise 0, donc 4 divise } 5^0 - 1.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$5^{n+1} - 1 = 5 \times 5^n - 1$$

$$\text{or } 4 \text{ divise } 5^n - 1.$$

$$\text{Donc il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 5^n - 1 = 4k$$

$$\text{donc } 5^n = 1 + 4k$$

$$\text{donc } 5^{n+1} - 1 = 5 \times (1 + 4k) - 1$$

$$= 5 + 5 \times 4k - 1$$

$$= 4 + 5 \times 4k$$

$$= 4 \times (1 + 5k)$$

$$\text{or } 1 + 5k \in \mathbb{Z}. \text{ Donc 4 divise } 5^{n+1} - 1.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise $5^n - 1$.

43. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété
 $P(n)$: « $u_{n+1} < u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 9$, et $u_1 = \sqrt{9} = 3$.
Donc $u_1 < u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a } u_{n+1} < u_n$$

donc $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$$\text{Donc } u_{n+2} < u_{n+1}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:
« $0 \leq u_n \leq 9$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 9$, donc $0 \leq u_0 \leq 9$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a } 0 \leq u_n \leq 3$$

donc $0 \leq \sqrt{u_n} < \sqrt{9}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$$\text{Donc } 0 \leq u_{n+1} \leq 3 \leq 9$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 9$.