

Pour s'entraîner séance Labomep démontrer une égalité par récurrence

Activité 1 : Introduire le raisonnement par récurrence

Un service de vidéos à la demande avec abonnement dispose de 2 000 films en 2020.

Chaque année, il retire de la plateforme 10 % de ses anciens films, et rajoute 200 nouveaux films.

1. Déterminer le nombre de films sur la plateforme en 2021 et en 2022.

2. Le service de vidéos à la demande fait de la publicité pour dire que le nombre de films sur la plateforme sera toujours constant. Peut-on croire cette publicité ?

3. On note u_n le nombre de films à la disposition des clients en 2020 + n .

a) Donner la valeur de u_0 et u_1 .

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

c) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .

4. On veut démontrer le résultat de la question précédente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la propriété « $u_n = 2\,000$ ».

a) Écrire la propriété P_0 et déterminer si elle est vraie. On dit alors que la propriété est **initialisée**.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire que $u_n = 2\,000$.

Démontrer que la propriété P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2\,000$.

On dit alors que la propriété est **héréditaire**.

c) Si une propriété est **initialisée** pour $n = 0$ et qu'elle est **héréditaire** pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors le principe de récurrence nous dit que la propriété est **vraie** pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons donc démontré que pour tout entier naturel n , $u_n = 2\,000$.

En déduire le nombre de films à la disposition des clients en 2050.

Exemple 1 plus concret : Les dominos



On dispose d'une infinité de dominos

Propriété : « les dominos sont tous couchés »

Initialisation: Le premier doit être couché

Hérédité : si les dominos sont espacés de 5 cm on n'a pas l'hérédité car un domino peut être couché sans que le suivant le soit

Si les dominos sont espacés de 2cm on prend un domino quelconque si on le couche le suivant est couché

Conclusion : Tous les dominos sont couchés, car la propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire

Exemple 2: Appliquer le principe des dominos à une propriété mathématique

Intéressons-nous aux nombres entiers positifs et impairs, et plus précisément à la somme des n plus petits d'entre eux, soit à :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1)$$

Émettre une conjecture puis la démontrer par récurrence

Exemple 3 : Comment rédiger

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n < 6$



Exercice 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$$

Démontrer par récurrence que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

37 On admet que pour tous réels a et b ,
 $|a \times b| = |a| \times |b|$.

Montrer par récurrence que pour tout réel x et pour tout
 $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.

40 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise
 $5^n - 1$.

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

Démontrer par récurrence que : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

38 Jason affirme que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 > 2n$.

1. Jason a-t-il raison ?

Justifier.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété « $n^2 > 2n$ ».

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En supposant que $P(n)$ est vraie, montrer que $P(n+1)$ est vraie.

b) $P(0)$ est-elle vraie ?

c) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie.

d) Conclure en corrigeant l'affirmation de Jason.

43 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer par récurrence que (u_n) est strictement décroissante.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 9$.