



PRÉPA À LA PRÉPA EN TERMINALE

Correction

MATHÉMATIQUES

STAGE 1

PLUS QUE DU SOUTIEN SCOLAIRE, UN ACCOMPAGNEMENT VERS LA RÉUSSITE

Séance 1 : L'ensemble des nombres réels

Corrections

I Manipulation d'inégalités

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Soient x et y deux réels, on obtient directement l'inégalité : $|x - y| \leq |x| + |y|$ en appliquant l'inégalité triangulaire au couple $(x, -y)$.

En appliquant l'inégalité triangulaire successivement aux couples $(x - y, y)$ et $(y - x, x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}|(x - y) + y| &\leq |x - y| + |y| \iff |x| \leq |x - y| + |y| \iff |x| - |y| \leq |x - y| \\ |(y - x) + x| &\leq |y - x| + |x| \iff |y| \leq |x - y| + |x| \iff |x| - |y| \geq -|x - y|\end{aligned}$$

Donc : $-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$, d'où le résultat : $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exercice 2.

Il suffit de raisonner par disjonction des cas selon la position de x par rapport à y .

Exercice 3.

Dans la suite, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des inéquations proposées.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $|-x + 2| \leq 1 \iff -1 \leq -x + 2 \leq 1 \iff 1 \leq x \leq 3$, d'où $\mathcal{S} = [1, 3]$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}|3x + 2| < |-4x + 12| &\iff |3x + 2|^2 < |-4x + 12|^2 \text{ par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &\iff (3x + 2)^2 < (-4x + 12)^2 \\ &\iff 7x^2 - 108x + 140 > 0.\end{aligned}$$

Tous calculs faits, on obtient $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{10}{7} \right[\cup]14, +\infty[$.

Exercice 4.

Dans la suite, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des équations proposées.

1. Tout d'abord, l'équation n'a de sens que dans $[2, +\infty[$. Soit donc $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x - 2} = 3 - x &\iff \begin{cases} x - 2 = (3 - x)^2 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 7x + 11 = 0 \\ x \leq 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \\ x \leq 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \\ x \leq 3 \end{cases} \\ &\iff x = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

2. Tout d'abord, l'équation n'a de sens que dans $[-11, +\infty[$. Soit donc $x \in [-11, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}x = \sqrt{x + 11} - 5 &\iff \begin{cases} x + 11 = (x + 5)^2 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 9x + 14 = 0 \\ x \geq -5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -7 \\ x \geq -5 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ x \geq -5 \end{cases} \\ &\iff x = -2.\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{-2\}$.

Exercice 5.

1. On a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+y} &\leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff \sqrt{x+y}^2 \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \text{ (les quantités étant positives ou nulles)} \\ &\iff x+y \leq x+2\sqrt{xy}+y \\ &\iff 2\sqrt{xy} \geq 0\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, celle de départ l'est aussi.

2. On applique l'inégalité précédente au couple de réels positifs ou nuls $(x-y, y)$, ce qui donne : $\sqrt{(x-y)+y} \leq \sqrt{x-y} + \sqrt{y}$, d'où le résultat.

3. On a déjà : $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}$. En effet :

- si $x \geq y$, il s'agit de l'inégalité que l'on vient d'établir précédemment ;
- si $x < y$, alors $\sqrt{x} - \sqrt{y} < 0 \leq \sqrt{|x-y|}$.

De même, on montre : $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{|x-y|}$. Ainsi, on a : $-\sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}$, d'où : $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$.

III Partie entière

Pour bien démarrer

Exercice 6.

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ et n_0 désigne l'entier cherché.

1.

$$\begin{aligned} 3n - 4 > A &\iff n > \frac{A+4}{3} \\ &\iff n \geq \left\lfloor \frac{A+4}{3} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } n_0 = \left\lfloor \frac{A+4}{3} \right\rfloor + 1.$$

2.

$$\begin{aligned} n^2 + 2n + 1 > A &\iff (n+1)^2 > A \\ &\iff n+1 > \sqrt{A} \\ &\iff n > \sqrt{A} - 1 \\ &\iff n \geq \left\lfloor \sqrt{A} - 1 \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

Donc :

- si $\sqrt{A} - 1 < 0$, $n_0 = 0$;
- sinon, $n_0 = \left\lfloor \sqrt{A} - 1 \right\rfloor + 1$.

3.

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 2n + 3} > A &\iff \sqrt{(n+1)^2 + 2} > A \\ &\iff (n+1)^2 > A^2 - 2 \end{aligned}$$

Donc :

- si $A^2 - 2 < 0$, $n_0 = 0$;
- sinon,

$$\begin{aligned} (n+1)^2 > A^2 - 2 &\iff n+1 > \sqrt{A^2 - 2} \\ &\iff n > \sqrt{A^2 - 2} - 1 \\ &\iff n \geq \left\lfloor \sqrt{A^2 - 2} - 1 \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

d'où, si $\sqrt{A^2 - 2} - 1 < 0$, $n_0 = 0$; sinon, $n_0 = \left\lfloor \sqrt{A^2 - 2} - 1 \right\rfloor + 1$.

Exercice 7.

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ et n_0 désigne l'entier cherché.

1.

$$\begin{aligned} -\varepsilon < \frac{1}{4+n} < \varepsilon &\iff 0 < \frac{1}{4+n} < \varepsilon \\ &\iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 4 \\ &\iff n \geq \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 4 \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

Donc :

- si $\frac{1}{\varepsilon} - 4 < 0$, $n_0 = 0$;
- sinon, $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 4 \right\rfloor + 1$.

2.

$$\begin{aligned}\left| \frac{n-1}{n+2} - 1 \right| < \varepsilon &\iff \frac{3}{n+2} < \varepsilon \\ &\iff n > \frac{3}{\varepsilon} - 2 \\ &\iff n \geq \left\lfloor \frac{3}{\varepsilon} - 2 \right\rfloor + 1\end{aligned}$$

Donc :

- si $\frac{3}{\varepsilon} - 2 < 0$, $n_0 = 0$;
- sinon, $n_0 = \left\lfloor \frac{3}{\varepsilon} - 2 \right\rfloor + 1$.

3.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n + 5}} < \varepsilon &\iff \frac{1}{\sqrt{(n+2)^2 + 1}} < \varepsilon \\ &\iff (n+2)^2 > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1\end{aligned}$$

Donc :

- si $\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 < 0$, $n_0 = 0$;
- sinon,

$$\begin{aligned}(n+2)^2 > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 &\iff n+2 > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} \\ &\iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} - 2 \\ &\iff n \geq \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} - 2 \right\rfloor + 1\end{aligned}$$

d'où, si $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} - 2 < 0$, $n_0 = 0$; sinon, $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} - 2 \right\rfloor + 1$.

Exercices avancés

Exercice 8.

1. Soient x et y deux réels, si $x \leq y$, alors, puisque $\lfloor x \rfloor \leq x$, on a $\lfloor x \rfloor \leq y$. $\lfloor y \rfloor$ étant le plus grand entier inférieur ou égal à y , on en déduit que $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$, donc par définition (on a encadré $x + n$ entre deux entiers consécutifs), $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.
3. Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $-\lfloor x \rfloor \geq -x > -\lfloor x \rfloor - 1$, ainsi, puisque $x \notin \mathbb{Z}$, $-\lfloor x \rfloor - 1 \leq -x < -\lfloor x \rfloor$.
Par définition (on a encadré x entre deux entiers consécutifs), on a donc $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$.
4. Soient x et y deux réels, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$, d'où $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
L'entier $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est inférieur ou égal à $x + y$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
L'entier $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ est strictement supérieur à $x + y$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 \geq \lfloor x + y \rfloor + 1$.
On en déduit le résultat.
5. Soient x et y deux réels, d'après le résultat précédent, on a $0 \leq \lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \leq 1$, d'où le résultat puisque $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ est un entier.

Exercice 9.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\lfloor 2x + 2 \rfloor = \lfloor x - 1 \rfloor \iff \lfloor 2x + 2 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 1 \iff \lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor \iff \lfloor 2x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor$.

Par ailleurs, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$, il n'y a donc que deux valeurs possibles pour $\lfloor 2x \rfloor$, à savoir $2\lfloor x \rfloor$ ou $2\lfloor x \rfloor + 1$.

- Si $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor \iff 2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1 \iff \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$, alors l'équation est équivalente à :
 $2\lfloor x \rfloor + 3 = \lfloor x \rfloor \iff \lfloor x \rfloor = -3$, d'où $x \in \left[-3, -\frac{5}{2}\right]$;
- Si $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 \iff 2\lfloor x \rfloor + 1 \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2 \iff \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, alors l'équation est équivalente à : $2\lfloor x \rfloor + 4 = \lfloor x \rfloor \iff \lfloor x \rfloor = -4$, d'où $x \in \left[-\frac{7}{2}, -3\right]$.

Finalement, l'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}\right]$.

IV Propriété de la borne supérieure

Exercice 10.

1. A est non vide et majorée (puisque bornée) donc admet une borne supérieure ; A est non vide et minorée (puisque bornée) donc admet une borne inférieure.

Puisque A est bornée et que B est incluse dans A , B est également majorée. En effet, il existe m et M deux réels tels que pour tout réel $x \in A$, $m \leq x \leq M$. Cet encadrement est a fortiori valable pour tout élément de B . B admet donc une borne supérieure et une borne inférieure.

2. Montrons la suite d'inégalités : $\inf(A) \leq \inf(B) \leq \sup(B) \leq \sup(A)$.
 - Tout élément de A est minoré par $\inf(A)$, donc, puisque $B \subset A$, tout élément de B est minoré par $\inf(A)$; $\inf(A)$ étant un minorant de B est au plus égal au plus grand minorant de B , à savoir $\inf(B)$, d'où : $\inf(A) \leq \inf(B)$.
 - Tout élément de A est majoré par $\sup(A)$, donc, puisque $B \subset A$, tout élément de B est majoré par $\sup(A)$; $\sup(A)$ étant un majorant de B est au moins égal au plus petit majorant de B , à savoir $\sup(B)$, d'où : $\sup(A) \geq \sup(B)$.

Exercice 11.

1. • $\min(A) = 1$.
 En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1$. A admet un plus petit élément, donc A admet dans $\mathbb{N}$ (et donc dans $\mathbb{R}$ également) une borne inférieure qui est le plus petit élément : $\inf_{\mathbb{N}}(A) = \inf_{\mathbb{R}}(A) = 1$.

- A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$.
En effet, le corollaire du caractère archimédien de $\mathbb{R}$ appliqué à $x = 2$ entraîne l'existence, pour tout réel m , d'un entier $n \geq 0$ tel que $2^n \geq m$, d'où $2^{n+1} > m$. A n'admet donc pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$, a fortiori, A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{N}$ et A n'a pas de plus grand élément.
2. • A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, puisque A contient $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$, dont on a montré qu'elle n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$. A n'admet donc de borne supérieure ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{Q}$ et A n'a pas de plus grand élément.
- $\inf_{\mathbb{Q}}(A) = 0$, donc $\inf_{\mathbb{R}}(A) = 0$.
En effet, 0 minore A dans $\mathbb{Q}$, puisque pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2^n > 0$. De plus, pour tout rationnel $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ (corollaire du caractère archimédien de $\mathbb{R}$), d'où $\frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$. On conclut avec l'un des critères donnés dans le cours.
 - A n'admet pas de plus petit élément.
En effet, il existerait sinon un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2^n = \inf_{\mathbb{Q}}(A) = 0$, ce qui est exclu.
3. • $\min(A) = 1$.
En effet, pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, $2 \geq 1 \implies 2^r \geq 1$. A admet un plus petit élément, donc A admet dans $\mathbb{Q}_+$ (et donc dans $\mathbb{R}$ également) une borne inférieure qui est le plus petit élément : $\inf_{\mathbb{Q}_+}(A) = \inf_{\mathbb{R}}(A) = 1$.
- A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, puisque A contient $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$, dont on a montré qu'elle n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$. A n'admet donc de borne supérieure ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{Q}_+$ et A n'a pas de plus grand élément.

Exercice 12.

Notons M_A (respectivement M_B) un majorant de A (respectivement un majorant de B) et m_A (respectivement m_B) un minorant de A (respectivement un minorant de B) dans $\mathbb{R}$.

1. $-A$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, puisque A est non vide, et bornée, puisque pour tout $a \in A$, $m_A \leq a \leq M_A$, donc $-m_A \geq -a \geq -M_A$.
2. Par suite, $-A$ admet dans $\mathbb{R}$ une borne inférieure et une borne supérieure.

En prenant $m_A = \inf(A)$ et $M_A = \sup(A)$ dans l'encadrement précédent, on établit que $-\inf(A)$ et $-\sup(A)$ sont respectivement un majorant et un minorant de $-A$.

En outre, si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de $-A$, alors, pour tout $a \in A$, $m \leq -a \leq M \implies -m \geq a \geq -M$, $-m$ et $-M$ sont donc respectivement un majorant et un minorant de A , donc $-m \geq \sup(A) \iff m \leq -\sup(A)$ et $-M \leq \inf(A) \iff -M \geq -\inf(A)$.

Ainsi, $-\inf(A)$ et $-\sup(A)$ sont respectivement le meilleur des majorants et le meilleur des minorants de $-A$, i.e. les bornes supérieure et inférieure de $-A$.

Exercice 13.

1. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$. Considérons $A' = A \cap \mathbb{N}$.
Si $A' \neq \emptyset$, alors A' est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (par hypothèse) et majorée, donc admet un plus grand élément, notons le n_0 . n_0 est le plus grand élément de A , en effet :
 - $n_0 \in A' \subset A$;
 - pour tout $a \in A$: si $a \in A'$, alors $a \leq n_0$; sinon, $a < 0 \leq n_0$.
 Si $A' = \emptyset$, alors $-A = \{-a, a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide, donc $-A$ possède un plus petit élément, notons le n_0 . $-n_0$ est le plus grand élément de A , en effet :
 - $n_0 \in -A$ donc $-n_0 \in A$;
 - pour tout $a \in A$, puisque $-a \geq n_0$, on a $a \leq -n_0$.
2. Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$. $-A$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$: il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $a \in A$, $a \geq m$ donc $-a \leq -m$. $-A$ possède donc un plus grand élément, notons le n_0 . $-n_0$ est le plus petit élément de A , en effet :
 - $-n_0 \in A$;
 - pour tout $a \in A$, puisque $-a \leq n_0$, on a $a \geq -n_0$.

Séance 2 : Les suites numériques

Corrections

I Limite d'une suite réelle

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ et n_0 désigne un rang convenable.

1.

$$\begin{aligned} 5n + \cos n \geq A &\iff 5n - 1 \geq A \\ &\iff n \geq \frac{A+1}{5} \\ &\iff n \geq \left\lfloor \frac{A+1}{5} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } n_0 = \left\lfloor \frac{A+1}{5} \right\rfloor + 1.$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{7^n}{4^{n+2}} \geq A &\iff \left(\frac{7}{4}\right)^n \geq 16A + 1 \\ &\iff n \ln\left(\frac{7}{4}\right) \geq \ln(16A + 1) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(16A + 1)}{\ln(7/4)} \\ &\iff n \geq \left\lfloor \frac{\ln(16A + 1)}{\ln(7/4)} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } n_0 = \left\lfloor \frac{\ln(16A + 1)}{\ln(7/4)} \right\rfloor + 1.$$

3.

$$\begin{aligned} -n^4 - e^{-2n^2+1} \leq -A &\iff -n^4 \leq -A \\ &\iff n^4 \geq A \\ &\iff n \geq \sqrt[4]{A} \\ &\iff n \geq \left\lfloor \sqrt[4]{A} \right\rfloor + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } n_0 = \left\lfloor \sqrt[4]{A} \right\rfloor + 1.$$

Exercice 2.

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ et n_0 désigne un rang convenable.

1.

$$\begin{aligned} -\varepsilon \leq \frac{1 + (-1)^n}{2n^2} \leq \varepsilon &\iff 0 \leq \frac{1 + (-1)^n}{2n^2} \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{2}{2n^2} \leq \varepsilon \\ &\iff n \geq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \\ &\iff n \geq \left\lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rceil + 1.$$

2.

$$\begin{aligned} \left| \frac{4n + \cos 2n}{3n} - \frac{4}{3} \right| \leq \varepsilon &\iff \left| \frac{\cos 2n}{3n} \right| \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{3n} \leq \varepsilon \\ &\iff n \geq \frac{1}{3\varepsilon} \\ &\iff n \geq \left\lceil \frac{1}{3\varepsilon} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } n_0 = \left\lceil \frac{1}{3\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

3.

$$\begin{aligned} \left| \frac{0.3^n - 1}{2^n + 1} \right| \leq \varepsilon &\iff \frac{1 - 0.3^n}{2^n + 1} \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{2^n + 1} \leq \varepsilon \\ &\iff \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \\ &\iff -n \ln 2 \leq \ln \varepsilon \\ &\iff n \geq \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \\ &\iff n \geq \left\lceil \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

Donc :

- si $\varepsilon \geq 1$, $n_0 = 0$;
- sinon, $n_0 = \left\lceil \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil + 1$.

Exercices avancés

Exercice 3.

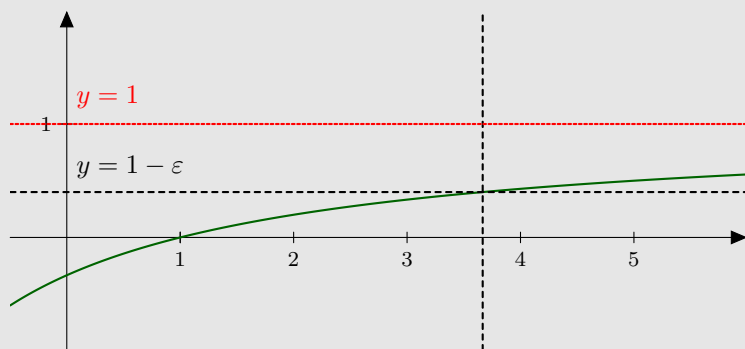
1. La convergence de la suite u vers l_1 entraîne l'existence, pour $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2} > 0$, d'un entier naturel n_1 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |u_n - l_1| < \frac{l_2 - l_1}{2}$.
2. De même, la convergence de u vers l_2 entraîne l'existence, pour $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2} > 0$, d'un entier naturel n_1 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |u_n - l_2| < \frac{l_2 - l_1}{2}$.
3. Donc, pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l_1| < \frac{l_2 - l_1}{2}$ et $|u_n - l_2| < \frac{l_2 - l_1}{2}$.
4. Pour tout $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$, on a donc :
 - $|u_n - l_1| < \frac{l_2 - l_1}{2} \implies u_n < l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} \implies u_n < \frac{l_1 + l_2}{2}$;
 - $|u_n - l_2| < \frac{l_2 - l_1}{2} \implies u_n > l_2 - \frac{l_2 - l_1}{2} \implies u_n > \frac{l_1 + l_2}{2}$;
 ce qui est exclu. Les réels l_1 et l_2 sont donc égaux.

Exercice 4.

1. Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left| \frac{n-1}{n+3} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Commençons notre recherche graphiquement :



On voit qu'il suffit de choisir le premier entier supérieur à l'antécédent de $1 - \varepsilon$ par $f : x \mapsto \frac{x-1}{x+3}$ pour que l'inégalité soit vérifiée.

Fixons donc $\varepsilon \in]0, 1[$ (pour être dans la configuration du graphique ; si $\varepsilon \geq 1$, l'inégalité voulue est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$) posons $n_0 = \left\lfloor \frac{3\varepsilon + 1}{1 - \varepsilon} \right\rfloor + 1$.

Remarquons tout d'abord que n_0 est un entier naturel : c'est ici que la condition joue son rôle, puisqu'alors $\frac{3\varepsilon + 1}{1 - \varepsilon} > 0$.

Ensuite, montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left| \frac{n-1}{n+3} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Soit donc $n \in \mathbb{N}$:

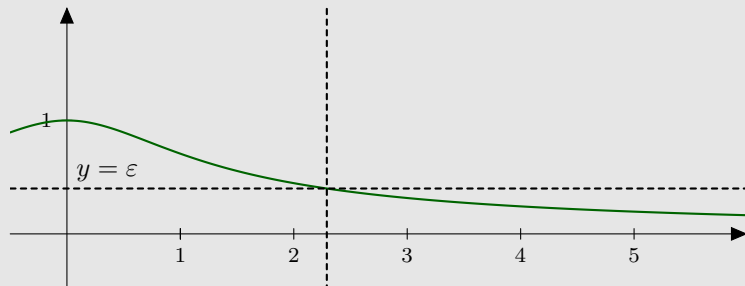
$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\implies n > \frac{3\varepsilon + 1}{1 - \varepsilon} \quad \text{puisque pour tout réel } x, \lfloor x \rfloor + 1 > x \\ &\implies f(n) > f\left(\frac{3\varepsilon + 1}{1 - \varepsilon}\right) \quad \text{par stricte croissance (simple à établir) de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &\implies \frac{n-1}{n+3} > 1 - \varepsilon \\ &\implies 1 > \frac{n-1}{n+3} > 1 - \varepsilon \quad \text{puisque pour tout entier naturel } n, f(n) < 1 \text{ (simple à établir)} \\ &\implies 1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+3} < 1 + \varepsilon \quad \text{qui est équivalent à l'inégalité voulue.} \end{aligned}$$

Ainsi, par définition, la suite $\left(\frac{n-1}{n+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1.

2. Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right| < \varepsilon.$$

Commençons notre recherche graphiquement :



On voit qu'il suffit de choisir le premier entier supérieur à l'antécédent (positif) de ε par $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ pour que l'inégalité soit vérifiée.

Fixons donc $\varepsilon \in]0, 1[$ (pour être dans la configuration du graphique ; si $\varepsilon \geq 1$, l'inégalité voulue est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$) posons $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} \right\rfloor + 1$.

Remarquons tout d'abord que n_0 est bien défini et est un entier naturel : c'est ici que la condition joue son rôle, puisqu'alors $\frac{1}{\varepsilon^2} - 1 > 0$ ce qui permet de prendre la racine carrée, puis d'obtenir $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} - 1} > 0$.

Ensuite, montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right| < \varepsilon.$$

Soit donc $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\implies n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \quad \text{puisque pour tout réel } x, [x] + 1 > x \\ &\implies f(n) < f\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 1\right) \quad \text{par stricte décroissance (simple à établir) de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &\implies \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \varepsilon \\ &\implies 0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \varepsilon \quad \text{puisque pour tout entier naturel } n, f(n) > 0 \text{ (simple à établir)} \\ &\implies -\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \varepsilon \quad \text{qui est équivalent à l'inégalité voulue.} \end{aligned}$$

Ainsi, par définition, la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 5.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$. L'analyse est la suivante : puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont proches de l , ce qui permet de borner ces termes ; les termes d'indices plus petits que n_0 sont encadrés entre le plus petit et le plus grand d'entre eux. Mettons cela en forme.

En appliquant la définition de la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers l avec $\varepsilon = 1 > 0$, on obtient l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| < 1 \implies l - 1 < u_n < l + 1$.

Puis, en notant $m_1 = \min\{u_n, n \in [0, n_0 - 1]\}$ et $M_1 = \max\{u_n, n \in [0, n_0 - 1]\}$, on a, pour tout $n \in [0, n_0 - 1]$, $m_1 \leq u_n \leq M_1$.

Finalement, en posant $m = \min(l - 1, m_1)$ et $M = \max(l + 1, M_1)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée.

II Opérations sur les limites

Pour bien démarrer

Exercice 6.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Exercice 7.

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$5. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$6. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{e}{e+1}$$

Exercices avancés

Exercice 8.

1. La convergence de la suite u vers l entraîne l'existence, pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, d'un entier naturel n_1 vérifiant :
 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

2. De même, la convergence de u vers l' entraîne l'existence, pour $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, d'un entier naturel n_1 vérifiant :
 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies |u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

3. Donc, pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} > 0$ et $|u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

4. Pour tout $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$, on a donc :

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (l + l')| &= |(u_n - l) + (v_n - l')| \\ &\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

La suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $l + l'$.

Exercice 9.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minorée, il s'agit de montrer l'assertion suivante :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n + v_n > A.$$

Fixons donc $A \in \mathbb{R}$.

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant minorée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq m$.

Puis, en appliquant la définition de la divergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $+\infty$ avec $A - m$, on en déduit l'existence d'un entier n_0 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n > A - m$.

Ainsi, pour tout $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$, on a :

$$u_n > A - m \text{ et } v_n \geq m \implies u_n + v_n > A.$$

La suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge donc vers $+\infty$.

Exercice 10.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang, il s'agit de montrer l'assertion suivante :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n v_n > A.$$

On ne considère ici, dans la définition de la divergence vers $+\infty$, que des réels A strictement positifs, ce qui permet de faire le produit des inégalités obtenues. Fixons donc $A \in \mathbb{R}_+^*$.

Par hypothèse, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall n \in \llbracket n_1; +\infty \llbracket, v_n \geq m$.

Puis, en appliquant la définition de la divergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $+\infty$ avec $\frac{A}{m}$, on en déduit l'existence d'un entier n_2 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \implies u_n > \frac{A}{m}$.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$, pour tout $n \in \llbracket n_0; +\infty \llbracket$, on a :

$$u_n > \frac{A}{m} \text{ et } v_n \geq m \implies u_n v_n > A \text{ les nombres qui interviennent sont dans } \mathbb{R}_+^*.$$

La suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge donc vers $+\infty$.

III Théorèmes d'existence

Pour bien démarrer

Exercice 11.

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 \leq \sin(n^2) \leq 1 \implies -\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^3 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)}{3n^3 \left(1 + \frac{\cos(n)}{3n^3} + \frac{1}{6n^5}\right)} = \frac{1}{3} \times \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{\cos(n)}{3n^3} + \frac{1}{6n^5}}$.

Puis, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n^2}\right) = 1$ (par opérations sur les limites) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\cos(n)}{3n^3} + \frac{1}{6n^5}\right) = 1$ (par encadrement), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$ (par opérations sur les limites).

3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2n^2 \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n^2}\right)}{5n^2 \left(1 + \frac{(-1)^n}{5n}\right)} = \frac{2}{5} \times \frac{1 + \frac{(-1)^n}{2n^2}}{1 + \frac{(-1)^n}{5n}}$. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{2n^2} \leq \frac{(-1)^n}{2n^2} \leq \frac{1}{2n^2}$,

donc, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2} = 0$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n^2}\right) = 1$.

De même, on établit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{5n}\right) = 1$. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5}$.

4. • Si $a = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

• Si $a < b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de raison dans $] -1, 1[$), on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

• On montre que même que si $a > b$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Exercice 12.

1. Simple récurrence.

2. Simple récurrence.

3. Le théorème de la limite monotone assure que la suite est convergente, notons l sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence qui définit la suite, on obtient :

$$l = \frac{2}{3-l} \iff l = 1 \text{ ou } l = 2$$

Puisque la suite est décroissante, $l \leq u_0$, d'où $l = 1$.

Exercice 13.

1. Simple récurrence.

2. Simple récurrence.

3. Par encadrement, on conclut que la suite converge vers 0.

Exercices avancés

Exercice 14.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe donc $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}. \quad (1)$$

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe donc $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\psi(n)}. \quad (2)$$

En appliquant (1) avec $\psi(n)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))}.$$

La relation (2) se réécrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{(\varphi \circ \psi)(n)}.$$

Puisque $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ apparaît comme une sous suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 15.

Le sens direct est un corollaire d'un résultat du cours.

Réciproquement, l'idée est la suivante : chaque terme de la suite est de la forme u_{3m}, u_{3m+1} ou u_{3m+2} (pour un certain $m \in \mathbb{N}$) donc « apparaît » dans l'une des trois sous suites. Chaque sous suite convergeant vers l , pourvu que m soit assez grand, les termes u_{3m}, u_{3m+1} ou u_{3m+2} sont arbitrairement proches de l , par suite, u_n également. Mettons cela en forme.

Fixons $\varepsilon > 0$, en appliquant la définition de la convergence de $(u_{3m})_{m \in \mathbb{N}}$ vers l , on en déduit l'existence d'un entier m_1 vérifiant :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_1 \implies |u_{3m} - l| < \varepsilon.$$

De même, on établit l'existence des entiers m_2 et m_3 vérifiant respectivement :

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_2 \implies |u_{3m+1} - l| < \varepsilon,$$

$$\forall m \in \mathbb{N}, m \geq m_3 \implies |u_{3m+2} - l| < \varepsilon.$$

Posons $n_0 = \max(3m_1, 3m_2 + 1, 3m_3 + 2)$, pour tout $n \in \llbracket n_0, +\infty \rrbracket$, on a :

- si $n = 3m$ (pour un certain $m \in \mathbb{N}$), alors : $3m \geq n_0 \implies m \geq m_1$, d'où : $|u_{3m} - l| < \varepsilon$, i.e. $|u_n - l| < \varepsilon$;
- si $n = 3m + 1$ (pour un certain $m \in \mathbb{N}$), alors : $3m + 1 \geq n_0 \implies m \geq m_2$, d'où : $|u_{3m+1} - l| < \varepsilon$, i.e. $|u_n - l| < \varepsilon$;
- si $n = 3m + 2$ (pour un certain $m \in \mathbb{N}$), alors : $3m + 2 \geq n_0 \implies m \geq m_3$, d'où : $|u_{3m+2} - l| < \varepsilon$, i.e. $|u_n - l| < \varepsilon$.

Dans tous les cas, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| < \varepsilon$, ce qui assure la convergence vers l .

Séance 3 : Limites

Corrections

I Définitions et premières propriétés

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Notons f la fonction considérée.

f est définie sur $\mathbb{R}^*$, son expression étant donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Par suite :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

Exercices avancés

Exercice 2.

Montrons que f est décroissante sur $\mathcal{V} = \left[\frac{2}{\pi}, +\infty\right[$, voisinage de $+\infty$. Soient $x, y \in \mathcal{V}$, $x \leq y$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \leq x \leq y &\implies \frac{\pi}{2} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} > 0 \quad \text{par décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\implies \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq \sin\left(\frac{1}{y}\right) > 0 \quad \text{par stricte croissance de } \sin \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &\implies f(x) \geq f(y). \end{aligned}$$

Exercice 3.

Il s'agit de montrer que, pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, |x - 1| \leq \eta \implies f(x) \geq A.$$

Fixons $A > 0$.

Remarquons que pour tout $x \in \mathcal{D}_f =]1, +\infty[$, $f(x) \geq \frac{3}{\sqrt{x-1}}$, il suffit donc d'avoir $\frac{3}{\sqrt{x-1}} \geq A$.

On a pour tout $x > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{3}{\sqrt{x-1}} \geq A &\iff \sqrt{x-1} \leq \frac{3}{A} \quad \text{par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff |x - 1| \leq \frac{9}{A^2} \quad \text{par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Le réel $\eta = \frac{9}{A^2} > 0$ convient donc.

II Opérations sur les limites

Pour bien démarrer

Exercice 4.

Dans la suite, on note f chacune des fonctions considérées.

1. $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$
2. $\lim_{\pm\infty} f = 0$, $\lim_{(-3)^-} f = \lim_{3^+} f = +\infty$ et $\lim_{(-3)^+} f = \lim_{3^-} f = -\infty$
3. $\lim_{-\infty} f = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = -\infty$, $\lim_{1^-} f = +\infty$ et $\lim_{1^+} f = -\infty$
4. $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$
5. $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = 0$ (en passant par la quantité conjuguée)
6. $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$
7. $\lim_{-\infty} f = -1$ et $\lim_{+\infty} f = 1$
8. $\lim_{-\infty} f = \frac{3}{2}$ et $\lim_{+\infty} f = 0$

Exercice 5.

Dans la suite, on note f chacune des fonctions considérées.

1. $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$, $\lim_{0^-} f = +\infty$ et $\lim_{0^+} f = -\infty$
2. $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$
3. $\lim_{-\infty} f = 0$, $\lim_{+\infty} f = -\infty$, $\lim_{0^-} f = -\infty$ et $\lim_{0^+} f = +\infty$
4. $\lim_{\pm\infty} f = -3$, $\lim_{3^-} f = +\infty$ et $\lim_{3^+} f = -\infty$
5. $\lim_{\pm\infty} f = -3$ et $\lim_{3^-} f = \lim_{3^+} f = +\infty$
6. $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$
7. $\lim_{\pm\infty} f = 1$, $\lim_{1^-} f = 0$ et $\lim_{1^+} f = +\infty$

Exercice 6.

On a :

- $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$, donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 &\iff \frac{1}{c} = 2 \\ &\iff c = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$, donc, f n'est pas définie en -1 , d'où :

$$\begin{aligned}c \times (-1) + d = 0 &\iff d = c \\ &\iff d = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, donc :

$$\begin{aligned}\frac{b}{d} = 1 &\iff b = d \\ &\iff b = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \neq -1$:

$$f(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

Exercices avancés

Exercice 7.

On note f chacune des fonctions considérées.

1. On écrit, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}},$$

$$d'où : \lim_{+\infty} f = \frac{1}{2}$$

2. On écrit, pour tout $x \neq a$,

$$f(x) = \frac{(x-a) \sum_{k=0}^n x^k a^{n-k}}{(x-a) \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}},$$

$$d'où : \lim_a f = \frac{\sum_{k=0}^n a^k a^{n-k}}{\sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k}} = a \times \frac{n+1}{n}$$

3. On écrit, pour tout $x > a$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} - \frac{1}{\sqrt{x+a}},$$

$$d'où : \lim_a f = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

4. On écrit, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}}}{1 + \frac{1}{x}}},$$

$$d'où : \lim_{+\infty} f = 1$$

Exercice 8.

1. Très classiquement, on utilise la quantité conjuguée.

Pour tout réel $x > 0$,

$$\sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3+1} = \frac{(\sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3+1})(\sqrt{x^3+x} + \sqrt{x^3+1})}{\sqrt{x^3+x} + \sqrt{x^3+1}} = \frac{x-1}{x \left(\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x^2}} \right)}$$

On a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \frac{1}{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x^2}} = +\infty$;

$$d'où : \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3+1} = 0.$$

2. On utilise une idée analogue à la précédente en tâchant de faire « sauter » les racines cubiques : pour tous réels a, b , on a : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

On écrit donc, pour tout réel $x \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} &= \frac{(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) \left((\sqrt[3]{x^3 + x^2})^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 - x^2} + (\sqrt[3]{x^3 - x^2})^2 \right)}{(\sqrt[3]{x^3 + x^2})^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2} \sqrt[3]{x^3 - x^2} + (\sqrt[3]{x^3 - x^2})^2} \\
 &= \frac{x^3 + x^2 - (x^3 - x^2)}{(x^3 + x^2)^{\frac{2}{3}} + (x^3 - x^2)^{\frac{2}{3}} + (x^3 + x^2)^{\frac{1}{3}} (x^3 - x^2)^{\frac{1}{3}}} \\
 &= \frac{2x^2}{x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \right]} \\
 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}}
 \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \frac{2}{3}$.

III Théorèmes d'existence

Pour bien démarrer

Exercice 9.

1. En utilisant l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x^3 + 1,$$

on en déduit : $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

De même, on a : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

2. En utilisant l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x^2 - x,$$

on en déduit : $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$.

3. En utilisant l'encadrement :

$$\forall x > 3, \frac{-5 - 2x}{x - 3} \leq f(x) \leq \frac{5 - 2x}{x - 3},$$

on en déduit : $\lim_{\pm\infty} f = -2$.

En outre : $\lim_{3^-} f = +\infty$ et $\lim_{3^+} f = -\infty$.

4. En utilisant l'encadrement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-x}{x^2 + 2 \cos^2(x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{x^2 + 2 \cos^2(x)},$$

on en déduit : $\lim_{\pm\infty} f = 0$.

Exercice 10.

1. En utilisant l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq x,$$

on en déduit : $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

De même, on a : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

2. En utilisant le résultat précédent, on a : $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

3. En utilisant le premier résultat, on a : $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$.

Exercices avancés

Exercice 11.

La fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$.

- Étude en $-\infty$: pour tout réel $x < -1$, $-1 < \frac{1}{x} < 0$, donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = -1$, d'où $f(x) = -x$, par suite, $\lim_{-\infty} f = +\infty$;
- Étude en $+\infty$: pour tout réel $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$, d'où $f(x) = 0$, par suite, $\lim_{+\infty} f = 0$;
- Étude en 0 : pour tout réel $x \neq 0$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$, donc :
 - * si $x > 0$, $f(x) \leq 1 < f(x) + x$, d'où : $1 - x < f(x) \leq 1$, donc, par encadrement, f admet une limite à droite en 0, à savoir : $\lim_{0^+} f = 1$;
 - * si $x < 0$, $f(x) \geq 1 > f(x) + x$, d'où : $1 - x > f(x) \geq 1$, donc, par encadrement, f admet une limite à gauche en 0, à savoir : $\lim_{0^-} f = 1$;

Finalement, puisque $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f$, f admet une limite en 0, à savoir : $\lim_0 f = 1$.

Exercice 12.

Il suffit de considérer les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $a_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $b_n = 2n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui divergent vers $+\infty$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\sin(\cos a_n) = \sin 0 = 0$, donc la suite $(\sin(\cos a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
- $\sin(\cos b_n) = \sin 1$, donc la suite $(\sin(\cos b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sin 1$.

Les limites étant différentes, la fonction $x \mapsto \sin(\cos x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 13.

Dans la suite, on note f la fonction dont on étudie les limites aux bornes.

1. Étude en $+\infty$: f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Sinon, en la notant l ($l \in \mathbb{R}$), puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, $\cos$ tendrait vers l en $+\infty$, ce qui est exclu (d'après le cours, $\cos$ n'admet pas de limite en $+\infty$).

On établit de même que f n'admet pas de limite en $-\infty$.

2. Étude en 0 : considérons les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(x_n) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(y_n) + 1 = 2$, les limites étant différentes, f n'admet pas de limite en 0.

2. Étude en $\pm\infty$: pour tout réel $x \neq 0$, $|f(x)| \leq \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right|$, puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

2. Étude en 0 : considérons les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(x_n) \times 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(y_n) = 1$, les limites étant différentes, f n'admet pas de limite en 0.

3. Étude en $\pm\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{par dérivabilité de } \sin \text{ en } 0) \end{array} \right\} \text{ d'où, par composée : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1.$$

2. Étude en 0 : pour tout réel $x \neq 0$, $|f(x)| \leq |x|$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Exercice 14.

Soit f une solution du problème.

Commençons par remarquer que :

- $f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$;
- $f(1 \times 1) = f(1) \times f(1)$, donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

Si $f(1) = 0$, alors pour tout réel x , $f(x) = f(x \times 1) = f(x) \times f(1) = 0$, donc f est la fonction nulle.

Si $f(1) = 1$, alors on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$. Ensuite, en notant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n - n) = f(n) + f(-n) = n + f(-n)$ et $f(n - n) = 0$, on obtient :

- d'abord pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = -n$,
- puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = n$.

L'égalité s'étend aux nombres rationnels, puisque pour tout $p \in \mathbb{Z}$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a : $f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) \times f(q) = f\left(\frac{p}{q}\right) \times q$ et $f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f(p) = p$ d'où : $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$.

Pour étendre l'égalité aux nombres réels, observons deux faits :

- f est positive sur $\mathbb{R}_+$: pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) = f(\sqrt{x^2}) = f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{x}) \geq 0$;
- f est croissante sur $\mathbb{R}$: pour tous réels x, y tels que $x \leq y$, on a : $y = \underbrace{y-x}_{\geq 0} + \underbrace{x}_{\geq 0}$, donc $f(y) = f(y-x) + f(x) \geq 0$.

Finalement, soit $x \in \mathbb{R}$, notons $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de rationnels, respectivement croissante et décroissante, qui tendent vers x . On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq x \leq b_n$, donc, par croissance de f sur $\mathbb{R}$: $f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$, ou encore : $a_n \leq f(x) \leq b_n$. En passant à la limite, on obtient : $x \leq f(x) \leq x$, donc, pour tout réel x , $f(x) = x$.

En résumé, nous sommes partis de f , une solution du problème, nous avons montré que f est soit la fonction nulle, soit l'identité de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, ces deux fonctions sont solutions du problème, donc, ce sont les seules solutions du problème.

Séance 4 : Continuité

Corrections

I Définitions et premières propriétés

Pour bien démarrer

Exercice 1.

f étant continue sur (tout intervalle contenu dans) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$, f est continue sur $\mathbb{R}$ ssi f est continue en ± 3 . On doit donc avoir :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) &\iff 3a + b = \frac{5}{7} \\ \lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = f(-3) &\iff -3a + b = -1\end{aligned}$$

Finalement, $a = \frac{2}{7}$ et $b = -\frac{1}{7}$.

Exercice 2.

1. f est continue sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R}^*$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ (par dérivabilité de $\cos$ en 0), donc f n'est pas continue en 0.

2. f est continue sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R}^*$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ (par dérivabilité de $\exp$ en 0), donc f est continue en 0.

3. f est continue sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, donc f est continue en 1.

4. f est continue sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

En outre :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ (par dérivabilité de $\exp$ en 0), donc f est continue en 0 ;
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = e - 1$, donc f n'est pas continue en 1.

Exercice 3.

Chacune des fonctions considérées est définie sur $\mathbb{R}$.

1. f est continue en tout réel non entier et non continue en tout entier relatif n , puisque $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \neq f(n)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \implies 1 - \lfloor x \rfloor \geq 1 - x > -\lfloor x \rfloor,$$

d'où, si $x \notin \mathbb{Z}$:

$$\lfloor 1 - x \rfloor = -\lfloor x \rfloor \implies f(x) = 0$$

En outre, si $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1 - x = 0$.

Par suite, f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$:

- f coïncide sur $I_n =]n, n + 1[$ avec $x \mapsto n + (x - n)^{2021}$, donc est continue sur I_n ;
- en outre, $\lim_{n^+} f = n = f(n)$;
- f coïncide sur I_{n-1} avec $x \mapsto n - 1 + (x - (n - 1))^{2021}$, donc $\lim_{n^-} f = n - 1 + (n - (n - 1))^{2021} = n = f(n)$;

Puisque $\lim_{n^+} f = \lim_{n^-} f = f(n)$, f est continue en n ; par suite, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercices avancés

Exercice 4.

Notons f la fonction. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$:

- f coïncide sur $I_n =]n, n+1[$ avec $x \mapsto (-1)^n \left(x - n - \frac{1}{2}\right)$, donc est continue sur I_n ;
- en outre, $\lim_{n^+} f = (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right) = f(n)$;
- f coïncide sur I_{n-1} avec $x \mapsto (-1)^{n-1} \left(x - (n-1) - \frac{1}{2}\right)$, donc $\lim_{n^-} f = (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = f(n)$;

Puisque $\lim_{n^+} f = \lim_{n^-} f = f(n)$, f est continue en n ; par suite, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Il suffit d'établir que, $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\min(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$. On conclut en utilisant les opérations.

Exercice 6.

Soit f une solution, on a : $f(1) = f(1) \times f(1) \iff f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

Si $f(1) = 0$, alors pour tout $x > 0$, $f(x) = f(1) \times f(x) = 0$, f est donc nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $f(1) \neq 0$, alors, pour tout $x > 0$:

- $f(x) = f\left(\sqrt{x}^2\right) = [f(\sqrt{x})]^2 \geq 0$;
- $f(1) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) \times f\left(\frac{1}{x}\right) \neq 0$;

donc, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

Nous pouvons donc considérer $g = \ln \circ f \circ \exp$, puisque $\exp$ est à valeurs strictement positives (ce qui permet de composer avec f) et f également (ce qui permet de composer avec $\ln$). g est continue sur $\mathbb{R}$ (par composition) et pour tous réels x, y :

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \ln \circ f \circ \exp(x+y) \\ &= \ln \circ f(e^x \times e^y) \\ &= \ln(f(e^x \times e^y)) \\ &= \ln(f(e^x) \times f(e^y)) \\ &= \ln(f(e^x)) + \ln(f(e^y)) \\ &= \ln \circ f \circ \exp(x) + \ln \circ f \circ \exp(y) \\ &= g(x) + g(y) \end{aligned}$$

Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x , $g(x) = \alpha x$, d'où, pour tout réel x , $\ln(f(e^x)) = \alpha x$. On en déduit d'abord, pour tout réel x , $f(e^x) = e^{\alpha x}$; enfin, puisque tout réel $t > 0$ s'écrit $t = e^x$ (avec $x = \ln t$), on obtient pour tout réel $t > 0$: $f(t) = f(e^x) = e^{\alpha x} = e^{\alpha \ln t} = t^\alpha$.

Réciproquement, la fonction nulle (restreinte à $\mathbb{R}_+^*$) et les puissances dont l'exposant est réel (restreintes à $\mathbb{R}_+^*$) sont solutions du problème, ce sont donc les seules.

Exercice 7.

Soit f une solution, soit $x \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par simple récurrence) : $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$. Puisque la suite $\left(\frac{x}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, la continuité de f en 0 entraîne que la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$; par ailleurs, la suite $\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à $f(x)$; par unicité de la limite, on obtient $f(x) = f(0)$, f est donc constante.

Réciproquement, les fonctions constantes sont solutions du problème, ce sont donc les seules.

II Deux théorèmes fondamentaux

Pour bien démarrer

Exercice 8.

1. On a :

- $\lim_{-\infty} g = -2$ (par croissances comparées) ;
- $\lim_{+\infty} g = +\infty$.

En outre, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $g'(x) = (x+3)e^{x-4}$.

Par suite :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	-2	$-e^{-7} - 2$	$+\infty$

Ainsi, g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-$, et le TVI strictement monotone assure l'existence d'une unique valeur d'annulation de g sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $\mathbb{R}$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $f'(x) = -x \times g(x)$, d'où :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$-\infty$

f admet donc un maximum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en α , il vaut :

$$\begin{aligned}
 f(\alpha) &= \alpha^2(1 - e^{\alpha-4}) \\
 &= \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha+2}\right) \quad \text{puisque } g(\alpha) = 0 \\
 &= \frac{\alpha^3}{\alpha+2}
 \end{aligned}$$

Exercice 9.

1. Soit $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - k$, f_n est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(0) = -k$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Le TVI strictement monotone assure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.
2. On a : $f(0) < 0 < f(1)$, d'où le résultat.

Exercice 10.

Soit $f : x \mapsto e^x - x^2$, f est définie, indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. En outre, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^x - 2x \\
 f''(x) &= e^x - 2
 \end{aligned}$$

Par suite :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f'(x)$	$+\infty$	$2 - 2 \ln 2$	$+\infty$

Ainsi, $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, le TVI strictement monotone assure que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.

1. La fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, d'où le résultat en utilisant le TVI strictement monotone.

2. Remarquons : $f(0) = 0$, donc $u_n > 0$.

En outre,

$$f(u_n) = 0 \iff u_n^5 + nu_n - 1 = 0,$$

donc, puisque $u_n^5 > 0$, on a :

$$nu_n - 1 \leq 0 \iff u_n \leq \frac{1}{n}$$

3. Par encadrement, on en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

4. On a :

$$u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \iff nu_n = 1 - u_n^5,$$

d'où, par opérations, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$.

Exercices avancés

Exercice 12.

Il suffit d'appliquer le TVI à $h : x \mapsto f(x) - 2020!g(x)$.

Exercice 13.

Il suffit d'appliquer le TVI à $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$, définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 14.

Soit f une solution, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^2(x) = 1 \iff f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$. S'il existait deux réels distincts x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = 1$ et $f(x_2) = -1$, alors le TVI entraînerait l'existence de $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = 0$, ce qui est exclu. f est donc constante égale à 1 ou -1 .

Réciproquement, les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto -1$ sont solutions du problème, ce sont donc les seules.

Exercice 15.

1. Considérons $g : x \mapsto f(x) - x$. On a :

- $g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$;
- $g(a) \geq 0$ puisque $f(a) \geq a$ et $g(b) \leq 0$ puisque $f(b) \leq b$;

le TVI entraîne l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que : $g(c) = 0 \iff f(c) = c$.

2. Il suffit d'établir l'existence de $c, d \in [a, b]$, distincts, tels que : $c \leq f(c)$ et $d \geq f(d)$, et d'utiliser le TVI comme précédemment.

Le TBA permet d'affirmer que $f([a, b])$ est un segment : $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$ avec $c, d \in [a, b]$ (en supposant $f(c) \leq f(d)$). Par suite, puisque $[a, b] \subset [f(c), f(d)]$, on a $[c, d] \subset [f(c), f(d)]$ (en supposant $c < d$), ce qui permet de conclure.

Exercice 16.

Puisque $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \geq B$, $f(x) \geq f(0)$.

f étant continue sur $[0, B]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, en particulier, il existe $c \in [0, B]$ tel que pour tout $x \in [0, B]$, $f(x) \geq f(c)$ (en particulier, $f(0) \geq f(c)$).

Par suite, f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en c .

Séance 5 : Corrections

I L'ensemble des nombres réels

Pour bien démarrer

Exercice 1.

Dans la suite, on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des inéquations proposées.

1. Tout d'abord, l'inéquation n'a de sens que si $x^2 + 3x - 4 \geq 0$ et $2 - x \geq 0$, i.e. dans $\mathcal{D} =]-\infty, -4] \cup [1, 2]$.
Soit donc $x \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 3x - 4} < \sqrt{2 - x} &\iff \sqrt{x^2 + 3x - 4}^2 < \sqrt{2 - x}^2 \\ &\iff x^2 + 4x - 6 < 0 \\ &\iff x \in]-2 - \sqrt{10}, -2 + \sqrt{10}[\quad (\text{tous calculs faits}).\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S} =]-2 - \sqrt{10}, -4] \cup [1, -2 + \sqrt{10}[$.

2. Tout d'abord, l'inéquation n'a de sens que dans $] -\infty, 5]$. Soit donc $x \in] -\infty, 5]$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{5 - x} \leq x + 3 &\iff \begin{cases} 5 - x \leq (x + 3)^2 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x^2 + 7x + 4 \geq 0 \\ x \geq -3 \end{cases} \\ &\iff x \geq \frac{-7 + \sqrt{33}}{2} \quad (\text{tous calculs faits}).\end{aligned}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \left[\frac{-7 + \sqrt{33}}{2}, 5 \right]$.

Exercice 2.

Pour tous réels x, y, z , on a :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx &\iff 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx) \\ &\iff (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est également.

En outre,

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx &\iff (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \\ &\iff (x - y)^2 = (y - z)^2 = (z - x)^2 = 0 \\ &\iff x = y = z\end{aligned}$$

Exercice 3.

Pour tout réel x , on a :

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2),$$

d'où, pour tous $x, y \in [-1, 1]$:

$$\begin{aligned}|x^3 - y^3| &\leq |x - y| \times (|x^2| + |xy| + |y^2|) \\ &\leq |x - y| \times (|x|^2 + |x||y| + |y|^2) \\ &\leq 3|x - y|\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Soient m et p deux réels tels que pour tout réel x , $f(x) = mx + p$. On a alors pour tous réels x et y ,
 $|f(x) - f(y)| = |m||x - y|$, d'où le résultat.

2. Pour tous réels x et y dans $[a, b]$, on a : $|x^2 - y^2| = |x + y| |x - y| \leq 2 \times \max(|a|, |b|) |x - y|$, d'où le résultat.
3. On a établi lors de la première séance que pour tous réels x et y , $||x| - |y|| \leq |x - y|$, on en déduit le résultat.
4. Pour tous réels x et y dans $[0, 2]$, on a :

$$\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} = \frac{(x - y)(x + y)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}}.$$

Puisque $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$ et $\sqrt{y^2 + 1} \geq 1$, on en déduit : $|\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}| \leq \frac{|x - y| |x + y|}{2} \leq \frac{4 |x - y|}{2}$,
finalement : $|\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}| \leq 2 |x - y|$, d'où le résultat.

Exercices avancés

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a

- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \times (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; puisque $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$, on en déduit que $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$;
- $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \times (\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$; puisque $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$, on en déduit que $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$).

2. D'après la question précédente, pour tout $k \in \llbracket 1, 10\,000 \rrbracket$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. En sommant cette inégalité pour k variant de 1 à 10 000, on obtient :

- pour le membre de gauche :
 $(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{10\,000} - \sqrt{9\,999}) + (\sqrt{10\,001} - \sqrt{10\,000}) = \sqrt{10\,001} - 1 ;$
- pour le membre de droite :
 $(\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{9\,999} - \sqrt{9\,998}) + (\sqrt{10\,000} - \sqrt{9\,999}) = 100.$

Finalement, $99 \leq S < 100$, donc $\lfloor S \rfloor = 99$.

Exercice 6.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \lfloor 2x - 2 \rfloor = \lfloor 2 - x \rfloor &\iff \lfloor 2x \rfloor = 4 + \lfloor -x \rfloor \\ \iff \lfloor 2x \rfloor = 4 - \lfloor x \rfloor - 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = 4 - x \text{ si } x \in \mathbb{Z} \\ \iff \lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor = 3 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \text{ ou } 3x = 4 \text{ si } x \in \mathbb{Z} \\ \iff \lfloor 2x \rfloor + \lfloor x \rfloor = 3 \text{ si } x \notin \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, il n'y a donc que deux valeurs possibles pour $\lfloor 2x \rfloor$, à savoir $2\lfloor x \rfloor$, qui correspond à $x \in \left[\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \right[$, ou $2\lfloor x \rfloor + 1$, qui correspond à $x \in \left[\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor x \rfloor + 1 \right[$.

- Si $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$, alors l'équation est équivalente à : $3\lfloor x \rfloor = 3 \iff \lfloor x \rfloor = 1$, d'où $x \in \left[1, \frac{3}{2} \right[$;
- Si $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$, alors l'équation est équivalente à : $3\lfloor x \rfloor + 1 = 3$, et n'admet donc aucune solution.

Finalement, l'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[1, \frac{3}{2} \right[$.

Exercice 7.

Nous utiliserons ici indifféremment la partie entière ou le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ pour établir qu'une partie n'est pas majorée ou n'est pas minorée.

1. • A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $m \in \mathbb{R}_+$, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $n > m$ (par exemple $n = \lfloor m \rfloor + 1$), d'où $2n(-1)^{2n} > m$. A n'admet donc de borne supérieure ni dans $\mathbb{R}$, ni a fortiori dans $\mathbb{Z}$ et A n'a pas de plus grand élément.

• A n'est pas minorée dans $\mathbb{R}$.

En effet, le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ appliqué à $\varepsilon = 1$ entraîne l'existence, pour tout réel m , d'un entier $n \geq 0$ tel que $n \geq -m$, d'où $-n \leq m$, et finalement $(2n+1)(-1)^{2n+1} < m$. A n'admet donc de borne inférieure ni dans $\mathbb{R}$, ni a fortiori dans $\mathbb{Z}$ et A n'a pas de plus petit élément.

2. Montrons que $\max(A) = 1$ et $\min(A) = -\frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, on a :

- $a_{2n} = \frac{1}{2n+1}$, d'où $-\frac{1}{2} < 0 < a_{2n} \leq 1$;
- $a_{2n+1} = -\frac{1}{2(n+1)}$, d'où $-\frac{1}{2} \leq a_{2n+1} < 0 < 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$, ce qui établit que A admet a_1 pour plus petit élément et a_0 pour plus grand élément.

Par suite, A admet une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, a fortiori également dans $\mathbb{R}$, et $\sup_{\mathbb{Q}}(A) = \sup_{\mathbb{R}}(A) = \max(A) = 1$. De même, A admet une borne inférieure dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$, et $\inf_{\mathbb{Q}}(A) = \inf_{\mathbb{R}}(A) = \min(A) = -\frac{1}{2}$.

3. • $\max(A) = 2$.

En effet, soit $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n+1} - n^2$, on a :

$$\begin{aligned} - a_{2n} &= \frac{2}{2n+1} - (2n)^2 \leq 2; \\ - a_{2n+1} &= -(2n+1)^2 \leq 0 < 2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 2$, ce qui établit que A admet a_0 pour plus grand élément.

Par suite, A admet une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$, a fortiori également dans $\mathbb{R}$, et $\sup_{\mathbb{Q}}(A) = \sup_{\mathbb{R}}(A) = \max(A) = 2$.

- A n'est pas minorée dans $\mathbb{R}$.

En effet, pour tout $m \in \mathbb{R}_-$:

$$-(2n+1)^2 < m \iff (2n+1)^2 > -m \iff 2n+1 > \sqrt{-m} \text{ (les réels considérés étant positifs), donc pour } n = \left\lfloor \frac{\sqrt{-m}-1}{2} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}, \text{ on a } -(2n+1)^2 < m.$$

Il vient que A n'admet de borne inférieure ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{Q}$ et A n'a pas de plus petit élément.

Exercice 8.

1. $A + B$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, puisque A et B sont non vides, et bornée, puisque pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$, $m_A \leq a \leq M_A$ et $m_B \leq b \leq M_B$, donc $m_A + m_B \leq a + b \leq M_A + M_B$.

Par suite, $A + B$ admet dans $\mathbb{R}$ une borne inférieure et une borne supérieure.

En prenant $m_A = \inf(A)$, $M_A = \sup(A)$, $m_B = \inf(B)$ et $M_B = \sup(B)$ dans l'encadrement précédent, on établit que $\inf(A) + \inf(B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$ sont respectivement un minorant et un majorant de $A + B$.

En outre, si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de $A + B$, alors, pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$, $m \leq a + b \leq M \implies m - a \leq b \leq M - a$. Fixons $a \in A$, cet encadrement signifie que $m - a$ et $M - a$ sont respectivement un minorant et un majorant de B , d'où :

$$\begin{cases} m - a \leq \inf(B) \iff m - \inf(B) \leq a \\ \sup(B) \leq M - a \iff a \leq M - \sup(B) \end{cases}.$$

A nouveau, ces inégalités signifient que $m - \inf(B)$ et $M - \sup(B)$ sont respectivement un minorant et un majorant de A , d'où :

$$\begin{cases} m - \inf(B) \leq \inf(A) \iff m \leq \inf(A) + \inf(B) \\ \sup(A) \leq M - \sup(B) \iff \sup(A) + \sup(B) \leq M \end{cases}.$$

Ainsi, $\inf(A) + \inf(B)$ et $\sup(A) + \sup(B)$ sont respectivement le meilleur des majorants et le meilleur des minorants de $A + B$, i.e. les bornes supérieure et inférieure de $A + B$.

2. On suppose ici que $m_A = m_B = 0$, $M_A \geq 0$ et $M_B \geq 0$.

- (a) AB est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, puisque A et B sont non vides, et bornée, puisque pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$, $0 \leq a \leq M_A$ et $0 \leq b \leq M_B$, donc $0 \leq ab \leq M_A M_B$ (les nombres intervenant étant dans $\mathbb{R}_+$).

Par suite, AB admet dans $\mathbb{R}$ une borne inférieure et une borne supérieure.

En prenant $m_A = \inf(A)$, $M_A = \sup(A)$, $m_B = \inf(B)$ et $M_B = \sup(B)$ (les nombres étant dans $\mathbb{R}_+$) dans l'encadrement précédent, on établit que $\inf(A) \inf(B)$ et $\sup(A) \sup(B)$ sont respectivement un minorant et un majorant de AB .

Si $A = \{0\}$ ou $B = \{0\}$, alors $AB = \{0\}$, donc le résultat est acquis.

Sinon, soient m et M sont respectivement un minorant et un majorant de AB , alors, pour tout $a \in A$, pour tout $b \in B$, $m \leq ab \leq M$. Donc, pour $a \in A$ non nul fixé, on a pour tout $b \in B$: $\frac{m}{a} \leq b \leq \frac{M}{a}$

(car $a > 0$), cet encadrement signifie que $\frac{m}{a}$ et $\frac{M}{a}$ sont respectivement un minorant et un majorant

$$\text{de } B, \text{ d'où : } \begin{cases} \frac{m}{a} \leq \inf(B) \iff \frac{m}{\inf(B)} \leq a \text{ (si } \inf(B) > 0) \\ \sup(B) \leq \frac{M}{a} \iff a \leq \frac{M}{\sup(B)} \text{ (puisque } \sup(B) > 0) \end{cases}.$$

A nouveau, ces inégalités étant valables pour tout $a \in A$ (même éventuellement nul), elles signifient que $\frac{m}{\inf(B)}$ et $\frac{M}{\sup(B)}$ sont respectivement un minorant et un majorant de A , d'où :

$$\begin{cases} \frac{m}{\inf(B)} \leq \inf(A) \iff m \leq \inf(A) \inf(B) \\ \sup(A) \leq \frac{M}{\sup(B)} \iff \sup(A) \sup(B) \leq M \end{cases}.$$

Ainsi, si $\inf(B) > 0$, $\inf(A) \inf(B)$ et $\sup(A) \sup(B)$ sont respectivement le meilleur des majorants et le meilleur des minorants de AB , i.e. les bornes supérieure et inférieure de AB .

Finalement, si $\inf(B) = 0$, alors l'inégalité $\frac{m}{a} \leq \inf(B)$ entraîne $m \leq 0$, donc $\inf(A) \inf(B) = 0$ apparaît encore comme le meilleur des minorants de AB .

(b) Le résultat est faux sans l'hypothèse que A et B sont incluses dans $\mathbb{R}_+$. Par exemple :

- prenons $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 0]$, on a : $AB = [-1, 0]$ et $\inf(AB) \neq \inf(A) \inf(B)$;
- prenons $A = B = [-1, 0]$, on a : $AB = [0, 1]$ et $\sup(AB) \neq \sup(A) \sup(B)$.

II Les suites numériques

Pour bien démarrer

Exercice 9.

Il suffit de remarquer que pour tous réels x et y , on a :

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = \frac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2}.$$

Ensuite, puisque u tend vers l et v tend vers l' , par opérations sur les limites on a :

- $u + v$ tend vers $l + l'$;
- $u - v$ tend vers $l - l'$, donc $|u - v|$ tend vers $|l - l'|$,

d'où (toujours par opérations sur les limites) :

- $\frac{u + v - |u - v|}{2}$ tend vers $\frac{l + l' - |l - l'|}{2} = \min(l, l')$;
- $\frac{u + v + |u - v|}{2}$ tend vers $\frac{l + l' + |l - l'|}{2} = \max(l, l')$.

Exercice 10.

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + n - 2$.

1. Simple récurrence.
2. Par minoration, on en déduit $\lim_n +\infty b_n = +\infty$.

Exercice 11.

- 1.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{5}{12}(v_n - u_n) \\ &= \frac{5}{12}w_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

2. En utilisant le signe de $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \leq 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$$

La différence $v_n - u_n$ tendant vers 0, le résultat est établi.

- 3.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} \\ &= 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ &= t_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. En passant à la limite dans la relation précédente (l désigne la limite commune des suites), on a :

$$t_0 = 3l + 4l \iff l = \frac{46}{7}$$

Exercice 12.

Graphiquement, on constate que :

- si $u_0 < \frac{2}{3}$, alors la suite diverge vers $-\infty$;
- si $u_0 > \frac{2}{3}$, alors la suite diverge vers $+\infty$;
- si $u_0 = \frac{2}{3}$, alors la suite est constante.

Pour l'établir formellement, on montre que :

- si la suite converge vers l , alors, en passant à la limite dans la relation de récurrence, nécessairement, $l = \frac{2}{3}$;
- si $u_0 < \frac{2}{3}$ (respectivement $u_0 > \frac{2}{3}$), alors, par une simple récurrence, la suite est décroissante (respectivement croissante).

L'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0 < \frac{2}{3}$ (respectivement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0 > \frac{2}{3}$) permet de conclure que la suite diverge vers $-\infty$ (respectivement diverge vers $+\infty$).

Exercices avancés

Exercice 13.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$.

En sommant cet encadrement pour k variant de 1 à n , on obtient : $n \times \frac{n}{n^2 + n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2 + 1}$.

Les suites $\left(\frac{n^2}{n^2 + n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{n^2}{n^2 + 1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers 1, donc par encadrement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$.

En sommant cet encadrement pour k variant de 1 à n , on obtient :

$$x \sum_{k=1}^n k - n < \sum_{k=1}^n \lfloor kx \rfloor \leq x \sum_{k=1}^n k \implies \frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n} < u_n \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}x.$$

Les suites $\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}x - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}x\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tendent vers $\frac{x}{2}$, donc par encadrement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également.

Exercice 14.

On établit successivement que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ;
- la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- la différence $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Les suites sont donc adjacentes, elles convergent alors vers la même limite, notons la l .

On a, en passant à la limite dans la relation de récurrence définissant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$l = \frac{3l + 1}{4} \iff l = 1$$

Exercice 15.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge (avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante), notons l sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ associé tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \implies |u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante, la dernière inégalité est équivalente à : $l - \varepsilon < u_{\varphi(n)} \leq l$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$ (cf cours), on a : $\varphi(n_0) \geq n_0 \implies l - \varepsilon < u_{\varphi(n_0)} \leq l$.

En outre, puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq \varphi(n_0) \implies u_{\varphi(n_0)} \leq u_n \leq u_{\varphi(n)}$.

Résumons : pour tout $\varepsilon > 0$, on a trouvé un rang, à savoir $\varphi(n_0)$, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \varphi(n_0) \implies l - \varepsilon < u_n \leq l.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente (de limite l).

2. Une suite extraite majorée et croissante est convergente (d'après le théorème de la limite monotone), on est ainsi ramené au cas précédent.
3. Montrons que la sous-suite $(u_{2^p})_{p \in \mathbb{N}}$ est majorée, ce qui nous ramène au cas précédent. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{2^{p+1}} - u_1 = u_{2^{p+1}} - u_{2^p} + u_{2^p} - u_{2^{p-1}} + \cdots + u_2 - u_1,$$

donc, en utilisant l'inégalité vérifiée par la sous-suite et d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |u_{2^{p+1}} - u_1| &\leq |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| + |u_{2^p} - u_{2^{p-1}}| + \cdots + |u_2 - u_1| \\ &\leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + 1 \\ &\leq \frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 2. \end{aligned}$$

Finalement : $|u_{2^{p+1}}| \leq |u_{2^{p+1}} - u_1| + |u_1| \leq 2 + |u_1|$, ce qui établit que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $|u_{2^p}| \leq 2 + |u_1|$, cette inégalité est également vraie pour $p = 0$, ce qui termine la démonstration.

Exercice 16.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq v_n \leq 1$.

Il vient, en multipliant le premier encadrement par $v_n \geq 0$: $0 \leq u_n \times v_n \leq v_n \leq 1$.

Puisque la suite $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1, on en déduit, par encadrement, que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite 1.

On établit de même que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de limite 1.

III Limites et continuité

Pour bien démarrer

Exercice 17.

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n\pi \quad \text{et} \quad v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Les suites divergent vers $+\infty$, en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_n) = 2n\pi \quad \text{et} \quad f(v_n) = 0,$$

donc les suites images ont des limites différentes ; par suite, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

On établit de même que f n'admet pas de limite en $-\infty$.

2. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos(x)}{x}},$$

avec en outre :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Ainsi, $\lim_{+\infty} f = 0$.

On établit de même : $\lim_{-\infty} f = 0$.

Par ailleurs, en notant α l'unique solution de l'équation $x + \cos(x) = 0$, on a : $\lim_{\alpha^-} f = -\infty$ et $\lim_{\alpha^+} f = +\infty$.

3. Pour tout $x \neq 0$, on a :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},$$

d'où : $\lim_{+\infty} f = 0$.

On établit de même : $\lim_{-\infty} f = 0$.

En écrivant, pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x+1},$$

on établit : $\lim_0 f = 1$ ainsi que $\lim_{1^-} f = -\infty$ et $\lim_{1^+} f = +\infty$.

Exercice 18.

1. Pour tout réel x , on a :

$$f(x) \geq x^2 - 1,$$

d'où : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

On établit de même : $\lim_{-\infty} f = -\infty$.

2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n \quad \text{et} \quad v_n = n + \frac{1}{2}$$

Les suites divergent vers $+\infty$, en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(u_n) = 0 \quad \text{et} \quad f(v_n) = \frac{1}{2},$$

donc les suites images ont des limites différentes ; par suite, f n'admet pas de limite en $+\infty$.

On établit de même que f n'admet pas de limite en $-\infty$.

3. On a :

- pour tout $x \in [-1, 0[$, $f(x) = -x$, donc : $\lim_0 f = 0$;

- pour tout $x \in]1, 2]$, $f(x) = x$, donc : $\lim_1 f = 1$.

De plus, pour tout $x > 1$,

$$1 \leq f(x) \leq \frac{x}{x-1},$$

d'où : $\lim_{+\infty} f = 1$.

On établit de même : $\lim_{-\infty} f = 1$.

Exercice 19.

Il suffit de déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f_a(x) = 0$, ce que nous ferons via les variations de f_a .

Tous calculs faits, on obtient (on note $y_1 = a + \frac{1}{27}$ et $y_2 = a$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	y_1	y_2	$+\infty$

Reste à distinguer selon la position des réels y_1 et y_2 par rapport à 0. Par exemple, si $y_1 < 0$, l'équation $f_a(x) = 0$ admet une unique solution, notons la α , f est alors négative sur $] -\infty, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, +\infty[$.

Exercice 20.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2} - e^+1$.

Sur $\mathbb{R}_-$, on a :

$$e^x - 1 < 0 < e^{-x^2} \implies f(x) < 0,$$

donc f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_-$.

Sur $\mathbb{R}_+$, f est continue et strictement décroissante, $f(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} f = -\infty$. Le TVI strictement monotone assure que f s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement, f n'admet qu'une valeur d'annulation sur $\mathbb{R}$, l'équation proposée n'admet donc qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 21.

Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = x \iff g(x) = 0$, en notant $g : x \mapsto f(x) - x$.

g est continue sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (via le signe de la dérivée), $\lim_{-\infty} g = +\infty$ et $\lim_{+\infty} g = -\infty$.

Le TVI strictement monotone assure que g s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$, f admet donc un unique point fixe.

Exercice 22.

1. C'est une application directe du TVI strictement monotone.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$f(x_n) < f(x_{n+1}) \implies x_n < x_{n+1} \quad \text{par stricte croissance de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $e^{x_n} + x_n = n$, on a :

$$\begin{aligned} \ln(n - \ln n) &\leq x_n \leq \ln n \iff n - \ln n \leq e^{x_n} \leq n \\ &\iff -x_n \geq -\ln n \quad \text{et} \quad -x_n \leq 0 \\ &\iff e^{x_n} \leq n \quad \text{et} \quad x_n \geq 0 \\ &\iff x_n \geq 0 \end{aligned}$$

De plus, $x_1 = 0$, donc l'inégalité $x_n \geq 0$ est vraie.

4. Par minoration, $\lim_{+\infty} x_n = +\infty$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} \leq x \leq 1,$$

d'où par encadrement : $\lim_{+\infty} \frac{x_n}{\ln n} = 1$.

Exercices avancés

Exercice 24.

Soit f une solution du problème.

f étant périodique, il existe $T \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x + nT)$.

Notons $l \in \mathbb{R}$ la limite de f en $+\infty$, puisque la suite $(x + nT)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, la suite $(f(x + nT))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l .

Par ailleurs, la suite $(f(x + nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à $f(x)$, donc $f(x) = l$. Ceci étant valable pour tout réel x , la fonction est donc constante.

Réciproquement, les fonctions constantes sont solutions du problème, ce sont donc les seules.

Exercice 25.

Notons k le réel tel que $|f| = k$, on en déduit que pour tout réel x , $f(x) = k$ ou $f(x) = -k$.

Si $k = 0$, le résultat est acquis.

Sinon, supposons qu'il existe x_1, x_2 deux réels distincts tels que $f(x_1) = k$ et $f(x_2) = -k$, le théorème des valeurs intermédiaires entraîne alors l'existence de $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $f(x_0) = 0$, ce qui exclu.

f est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26.

Notons a et b deux réels tels que $a \leq g \leq b$ sur $\mathbb{R}$.

- il est immédiat de constater que $g \circ f$ est bornée ;
- f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[a, b]$, donc y est bornée : il existe m, M deux réels tels que $m \leq f \leq M$ sur $[a, b]$, par suite, $m \leq f \circ g \leq M$, $f \circ g$ est donc bornée.

Exercice 27.

1. Supposons $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$, considérons le prolongement par continuité de f en b , noté $\bar{f}$:

- puisque f possède une limite finie en a , elle est bornée au voisinage de a : il existe $B < b$ tel que f est bornée sur $] -\infty, B]$;
- sur $[B, b]$, $\bar{f}$ est continue donc est bornée, par suite f est bornée sur $[B, b]$;

Finalement, f est bornée sur $]a, b[$.

2. La réponse est négative, il suffit de considérer $f : x \mapsto x$ sur $]0, 1[$.

Exercice 28.

Soit f une solution du problème.

On établit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{x}{2^{n+1}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on somme ces égalités pour k variant de 0 à $n-1$, on obtient : $f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{x}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$.

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$:

- le membre de gauche tend vers $f(x) - f(0)$ (par continuité de f en 0) ;
- le membre de droite tend vers $\frac{x}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = x$;

d'où $f(x) - f(0) = x$.

Réciproquement, les fonctions $f_k : x \mapsto x + k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) sont solutions du problème, ce sont donc les seules.