



PRÉPA À LA PRÉPA SCIENTIFIQUE EN TERMINALE Cours

MATHÉMATIQUES

STAGE 1

PLUS QUE DU SOUTIEN SCOLAIRE, UN ACCOMPAGNEMENT VERS LA RÉUSSITE

Séance 1 : L'ensemble des nombres réels

Cours

I Manipulation d'inégalités

I.1 Généralités

L'ensemble des nombres réels possède par construction (hors-programme) les propriétés suivantes :

Théorème

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

- $x \leq y \implies x + z \leq y + z$;
- $\begin{cases} x \leq y \\ 0 \leq z \end{cases} \implies xz \leq yz$;
- $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$.

De ces trois seules propriétés, nous pouvons déduire les suivantes, d'usage constant :

Propriété

1. (a) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x \leq y \iff x + z \leq y + z$.
(b) Pour tout $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x \leq y \\ u \leq v \end{cases} \implies x + u \leq y + v$.
(c) Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,
 $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \leq y_k) \implies \sum_{k=1}^n x_k \leq \sum_{k=1}^n y_k$.
2. (a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^*$, $x \leq y \iff xz \leq yz$.
(b) Pour tout $(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$, $\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq u \leq v \end{cases} \implies xu \leq yv$.
(c) Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,
 $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq x_k \leq y_k) \implies \prod_{k=1}^n x_k \leq \prod_{k=1}^n y_k$.
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x < y \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Exercice

Montrer l'équivalence bien connue :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x \leq y \iff x^2 \leq y^2.$$

Remarque. Cette équivalence permet d'établir que deux nombres positifs ou nuls sont égaux si et seulement leurs carrés sont égaux :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x = y \iff x^2 = y^2.$$

I.2 Valeur absolue

Définition (valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$, la *valeur absolue* de x , notée $|x|$, est le réel défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

L'énoncé suivant s'établit simplement en procédant par disjonction des cas, selon le signe des quantités apparaissant dans les valeurs absolues :

Propriété

Pour tous réels x et y , on a :

1. $|x| \geq 0$ et $-|x| \leq x \leq |x|$;
2. $|x| = 0 \iff x = 0$;
3. $|xy| = |x| |y|$, en particulier : $|x|^2 = x^2$;
4. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.

L'énoncé ci-après nous servira notamment dans la résolution d'inéquations faisant intervenir les valeurs absolues :

Propriété

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a) \quad |x| = |y| \iff x^2 = y^2 ; \qquad (b) \quad |x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2 .$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$(a) \quad |x| = \varepsilon \iff x = \varepsilon \text{ ou } x = -\varepsilon ; \qquad (b) \quad |x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon .$$

$$(c) \quad \text{Plus généralement, pour tout } l \in \mathbb{R}, \quad |x - l| \leq \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq x \leq l + \varepsilon .$$

Remarque.

1. Le réel $|x - l|$ s'interprète comme la distance entre x et l . L'ensemble des réels vérifiant l'inégalité $|x - l| \leq \varepsilon$ est donc l'ensemble des réels à distance au plus ε de l , i.e. l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.
2. On dispose d'un résultat analogue en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la propriété précédente.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x - 2| < |2x + 1|$.

Proposition (inégalité triangulaire)

Pour tous réels x et y , on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

En outre, l'inégalité est une égalité si et seulement si les nombres sont de même signe :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x + y| = |x| + |y| \iff xy \geq 0 .$$

Exercice

Démontrer l'inégalité triangulaire.

I.3 Racine carrée

Théorème - Définition (racine carrée)

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, la *racine carrée* de x , notée $\sqrt{x}$, est l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré est égal à x .

Ainsi, pour montrer que le nombre r est la racine carrée du nombre $x \geq 0$, i.e. $r = \sqrt{x}$, il faut (et suffit de) montrer que $r \geq 0$ et $r^2 = x$. Autrement dit, on dispose de l'équivalence :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall r \in \mathbb{R}, r = \sqrt{x} \iff \begin{cases} r \geq 0 \\ r^2 = x \end{cases}.$$

Exercice

Montrer l'égalité $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$.

Proposition

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2} = x$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$.
4. Pour tous $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Le résultat suivant nous sera utile dans la résolution d'inéquations faisant intervenir les racines carrées :

Proposition

Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \leq y \iff (x \leq y^2 \text{ et } y \geq 0).$$

Exercice

Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2 - 4x + 1} \leq x + 2$.

II Puissances d'exposants rationnels

On suppose connue la notion de puissance d'exposant un entier relatif, ainsi que ses propriétés algébriques. Le but de cette section est uniquement d'étendre cette notion aux exposants rationnels et de brièvement en lister les propriétés algébriques afin de préparer la séance 2.

Théorème - Définition (racine $n^{\text{ème}}$ d'un réel positif)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel positif ou nul dont la puissance $n^{\text{ème}}$ est égale à x . On le note $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{\frac{1}{n}}$, on l'appelle la *racine $n^{\text{ème}}$* de x . On a ainsi : $\sqrt[n]{x} \geq 0$ et $(\sqrt[n]{x})^n = x$.

Remarque. Pour $n = 2$, on retrouve la définition de la racine carrée d'un réel positif ou nul, on la note $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$.

Proposition

Pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

1. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$;
2. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ (si $y > 0$) ;
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$.

On peut désormais étendre à $\mathbb{Q}$ les puissances :

Théorème - Définition (puissance d'exposant un rationnel)

Soit $r \in \mathbb{Q}$, écrit sous la forme $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose : $x^r = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

Les relations connues pour des puissances d'exposants entiers sont valables pour des puissances d'exposants rationnels :

Propriété

Pour tous réels strictement positifs x et y , pour tous rationnels r et s , on a :

1. $x^r \times x^s = x^{r+s}$;
2. $(x \times y)^r = x^r \times y^r$;
3. $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$;
4. $\frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$.
5. $(x^r)^s = x^{rs}$.

III Partie entière

Théorème - Définition (partie entière)

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On appelle cet entier la *partie entière* de x , on le note $\lfloor x \rfloor$. On a ainsi pour tout réel x : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice

Montrer l'unicité de la partie entière d'un réel.

Remarque.

1. Pour déterminer $\lfloor x \rfloor$, il faut donc encadrer x entre deux entiers consécutifs.
2. Voici deux caractérisations commodes pour établir les propriétés de la partie entière (cf exercices) :

- pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x , autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, n \leq x \iff n \leq \lfloor x \rfloor;$$

- pour tout réel x , $\lfloor x \rfloor + 1$ est le plus petit entier relatif strictement supérieur à x , autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, n > x \iff n \geq \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple. On a :

- $\lfloor \sqrt{5} \rfloor = \lfloor \sqrt{7} \rfloor = 2$ car $2 \leq \sqrt{5} < 3$ et $2 \leq \sqrt{7} < 3$;
- $\lfloor \sqrt{7} - \sqrt{5} \rfloor = 0$ car $0 \leq \sqrt{7} - \sqrt{5} < 1$;
- $\lfloor \sqrt{5} - \sqrt{7} \rfloor = -1$ car $-1 \leq \sqrt{5} - \sqrt{7} < 0$.

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la partie entière de $2x + 1$ en fonction de x .

IV Propriété de la borne supérieure

Définition (majorant, minorant)

Soit E une partie de $\mathbb{R}$, soit A une partie de E .

1. Soit $M \in E$, on dit que M est un *majorant* de A dans E (ou que A est *majorée par* M dans E) si et seulement si $\forall a \in A, a \leq M$.

On dit que A est majorée dans E si et seulement si A admet un majorant dans E , i.e. :

$$\exists M \in E / \forall a \in A, a \leq M.$$

2. Soit $m \in E$, on dit que m est un *minorant* de A dans E (ou que A est *minorée par* m dans E) si et seulement si $\forall a \in A, a \geq m$.

On dit que A est minorée dans E si et seulement si A admet un majorant dans E , i.e. :

$$\exists m \in E / \forall a \in A, a \geq m.$$

3. On dit que A est bornée dans E si et seulement si A est majorée et minorée dans E .

Exercice

- On considère A la partie de $\mathbb{Q}$ définie par $A = \{q \in \mathbb{Q} / q \in [0, 1[\}$.
 - Déterminer l'ensemble des majorants de A dans $\mathbb{Q}$, puis l'ensemble des minorants de A dans $\mathbb{Q}$.
 - Faire de même dans $\mathbb{R}$.
- On considère A la partie de $\mathbb{Q}$ définie par $A = \mathbb{Q}_+^*$.
 - Déterminer l'ensemble des majorants de A dans $\mathbb{Q}$, puis l'ensemble des minorants de A dans $\mathbb{Q}$.
 - Faire de même dans $\mathbb{R}$.

Les considérations précédentes mènent naturellement à se poser la question, pour une partie majorée, du meilleur des majorants et de manière symétrique, pour une partie minorée, du meilleur des minorants. Cela nous conduit dans un premier temps aux définitions qui suivent.

Théorème - Définition (plus grand élément, plus petit élément)

Soit E une partie de $\mathbb{R}$, soit A une partie de E , soit $x \in E$.

- On dit que x est un *plus grand élément* de A (ou un maximum de A) si et seulement si $x \in A$ et x est un majorant de A dans E . Si un tel élément existe, il est unique, on le note $\max(A)$, on l'appelle le plus grand élément de A .
- On dit que x est un *plus petit élément* de A (ou un minimum de A) si et seulement si $x \in A$ et x est un minorant de A dans E . Si un tel élément existe, il est unique, on le note $\min(A)$, on l'appelle le plus petit élément de A .

Exercice

Montrer l'unicité du plus grand élément s'il existe.

Exercice

- On considère A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \{q \in \mathbb{Q} / 0 \leq q < 1\}$.
 - Déterminer, s'il existe, le plus petit élément de A .
 - Déterminer, s'il existe, le plus grand élément de A .
- On considère A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = [0, 1[$.
 - Déterminer, s'il existe, le plus petit élément de A .
 - Déterminer, s'il existe, le plus grand élément de A .

En ce qui concerne le plus petit élément, l'ensemble $\mathbb{N}$ possède la propriété fondamentale suivante :

Propriété (plus petit élément dans $\mathbb{N}$)

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Ce résultat intuitif est un axiome de $\mathbb{N}$, il est équivalent au principe de récurrence. Il permet d'établir le théorème :

Théorème (plus grand élément dans $\mathbb{N}$)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un plus grand élément.

On déduit également le théorème :

Théorème (plus grand/petit élément dans $\mathbb{Z}$)

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.
- Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ possède un plus petit élément.

Une partie admettant un plus grand élément est majorée, dans ce cas, le meilleur des majorants est de manière évidente le plus grand élément. De manière symétrique, une partie admettant un plus petit élément est minorée, dans ce cas, le meilleur des minorants est le plus petit élément. Le cas de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ est de ce point de vue réglé. En revanche pour $\mathbb{R}$, il existe des parties de $\mathbb{R}$ n'admettant pas de plus grand élément ou de plus petit élément. Pour répondre à la question du meilleur des majorants (respectivement des minorants), on introduit une nouvelle définition.

Définition (borne supérieure, borne inférieure)

Soit E une partie de $\mathbb{R}$, soit A une partie de E .

1. On appelle *borne supérieure de A dans E* le plus petit majorant de A dans E , s'il existe. On le note alors $\sup_E(A)$.
2. On appelle *borne inférieure de A dans E* le plus grand minorant de A dans E , s'il existe. On le note alors $\inf_E(A)$.

Exercice

On considère A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A =]0, 1]$.

1. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure de A .
2. Déterminer, si elle existe, la borne inférieure de A .

Donnons une caractérisation commode des bornes supérieure et inférieure pour établir leurs propriétés (cf exercices) :

Proposition (caractérisation de sup et de inf)

Soit E une partie de $\mathbb{R}$, soit A une partie de E admettant des bornes supérieure et inférieure. Posons $\alpha = \sup_E(A)$ et $\beta = \inf_E(A)$, on a :

1. α est caractérisé par :

- (a) $\forall a \in A, a \leq \alpha$
- (b) et l'une quelconque des assertions équivalentes suivantes :
 - i. $\forall M \in E, (\forall a \in A, a \leq M) \implies \alpha \leq M$;
 - ii. $\forall M \in E, M < \alpha \implies (\exists a \in A / a > M)$;
 - iii. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / a > \alpha - \varepsilon$.

2. β est caractérisé par :

- (a) $\forall a \in A, a \geq \beta$
- (b) et l'une quelconque des assertions équivalentes suivantes :
 - i. $\forall m \in E, (\forall a \in A, a \geq m) \implies \beta \geq m$;
 - ii. $\forall m \in E, m > \beta \implies (\exists a \in A / a < m)$;
 - iii. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A / a < \beta + \varepsilon$.

Exercice

Démontrer la caractérisation de la borne supérieure.

Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}$ possède la propriété fondamentale suivante :

Théorème (propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

Il s'agit là d'un axiome de $\mathbb{R}$, dont on déduit le théorème symétrique :

Théorème (propriété de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$)

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.

Terminons par une dernière définition :

Définition (droite numérique achevée)

On appelle *droite numérique achevée*, notée $\overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint les deux éléments distincts $-\infty$ et $+\infty$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On étend partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les deux opérations, addition et multiplication :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \end{cases}$$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ et $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\begin{cases} x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty \\ x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty \end{cases}$$
- pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$,
$$\begin{cases} x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty \\ x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty \end{cases}$$

On étend également l'ordre à $\overline{\mathbb{R}}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\infty < x < +\infty$.

Remarque.

1. Nous ne donnons aucun sens aux expressions $(+\infty) + (-\infty)$, $0(+\infty)$ et $0(-\infty)$.
2. Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut montrer (une fois définies les notions ad-hoc) que toute partie (vide ou non, majorée ou non) admet une borne supérieure. De même, toute partie (vide ou non, minorée ou non) admet dans $\overline{\mathbb{R}}$ une borne inférieure.

Séance 2 : Les suites numériques

Cours

I Limite d'une suite réelle

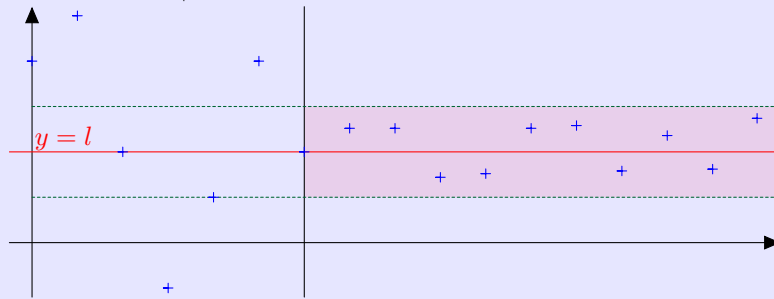
I.1 Suites convergentes : définition et premières propriétés

Définition (suite convergente, version T^{ale})

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* ssi il existe un réel l tel que tout intervalle ouvert contenant l , contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Le réel l est alors unique et est appelé la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers (ou tend vers, ou a pour limite) l quand n tend vers $+\infty$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.



Pour la Sup

On peut montrer que tout intervalle ouvert contenant l contient un intervalle ouvert de la forme $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$, la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se traduit formellement donc ainsi :

Définition (suite convergente, version Sup)

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* ssi :

$$\exists l \in \mathbb{R} / \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le réel l est alors unique et est appelé la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice

En utilisant la définition, montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors les suites $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent également vers l .

Remarque. On se sert souvent de la proposition précédente pour montrer qu'une suite ne converge pas.

Exercice

Montrer que la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas (on dit qu'elle est divergente).

Proposition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Remarque. La réciproque du résultat précédent est fausse : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente alors que la suite $(|(-1)^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Proposition

Toute suite convergente est bornée.

Exemple.

- La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc ne converge pas.
- La réciproque de la proposition précédente est fausse : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée mais n'est pas convergente.

Proposition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, $l \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, si $l > m$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.

Pour la Sup

Exercice

Démontrer le résultat précédent.

On en déduit :

Corollaire

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{R}$, si $l \neq 0$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $|u_n| > 0$ à partir d'un certain rang.

Corollaire (passage à la limite dans les inégalités)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, $l \in \mathbb{R}$, soient m et M deux réels, s'il existe un rang à partir duquel $m \leq u_n \leq M$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $m \leq l \leq M$.

Remarque. Les inégalités strictes ne survivent pas au passage à la limite, considérer par exemple la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

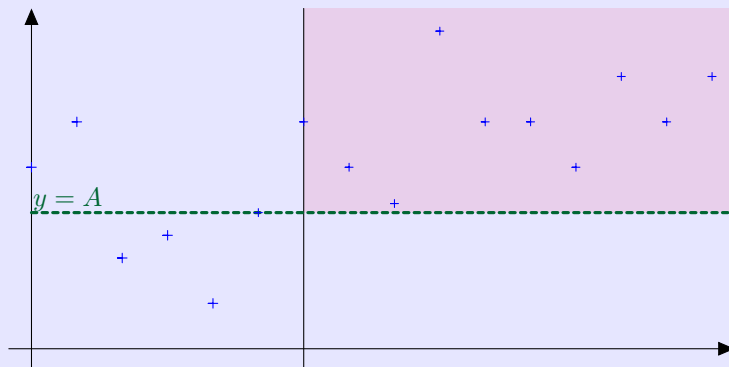
I.2 Suites divergentes : définitions et premières propriétés

Définition (suite tendant vers l'infini, version T^{ale})

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, on dit que :

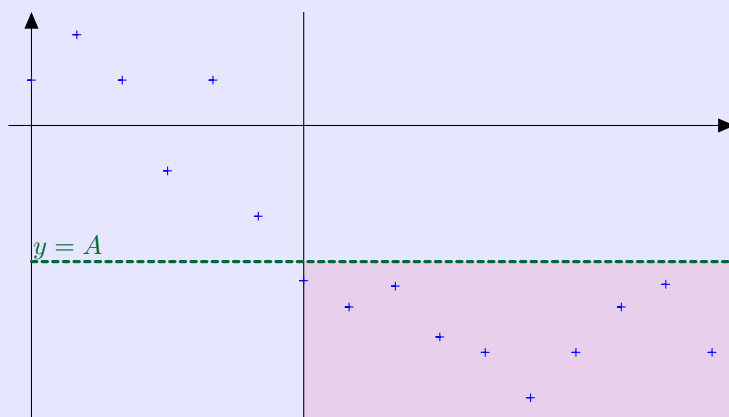
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers (ou diverge vers, ou a pour limite) $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ssi pour tout intervalle du type $]A; +\infty[$ (avec A réel), il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]A; +\infty[$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers (ou diverge vers, ou a pour limite) $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ssi pour tout intervalle du type $] -\infty; A[$ (avec A réel), il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $] -\infty; A[$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.



Pour la Sup

Définition (suite tendant vers l'infini, version Sup)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, on dit que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ssi :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n > A.$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ ssi :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies u_n < A$$

Remarque. On peut montrer qu'il suffit en pratique de considérer uniquement des réels A strictement positifs (respectivement strictement négatifs) pour assurer la divergence d'une suite vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Exercice

1. En utilisant la définition, montrer que la suite $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. En utilisant la définition, montrer que la suite $(-n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Définition (suite divergente)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, on dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *divergente* ssi elle n'est pas convergente, i.e. ssi elle tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$ ou n'admet pas de limite.

Exemple.

- Les suites $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(-n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ sont divergentes.
- La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), alors les suites $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ tendent également vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Exercice

Montrer que la suite $(n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), alors la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Remarque. La réciproque du résultat précédent est fausse : la suite $(n(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite alors que la suite $(|n(-1)^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite,

- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, non majorée ;
- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, non minorée.

II Opérations sur les limites

Certaines démonstrations de cette section sont proposées en exercices.

II.1 Limite d'une somme

Proposition (somme de deux suites convergentes)

La somme de deux suites convergentes est une suite convergente de limite la somme des limites, autrement dit : soient u et v deux suites, l et l' deux réels, si u et v convergent respectivement vers l et l' , alors $u + v$ est convergente de limite $l + l'$.

Proposition (somme d'une suite divergeant vers $+\infty$ et d'une suite minorée)

La somme d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite minorée est une suite divergeant vers $+\infty$, autrement dit : soient u et v deux suites, m un réel, si u tend vers $+\infty$ et v est minorée par m , alors $u + v$ diverge vers $+\infty$.

En appliquant aux couples de suites $(-u, v)$, $(u, -v)$ et $(-u, -v)$, on obtient des résultats analogues pour la somme d'une suite divergente et d'une suite minorée ou majorée.

Le tableau suivant rassemble les différents cas de figure (FI signifie forme indéterminée, i.e. qu'on ne peut rien affirmer en toute généralité) :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$ \diagdown $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

En résumé, dans $\overline{\mathbb{R}}$, aux formes indéterminées près, la limite d'une somme est la somme des limites.

Remarque. On ne peut rien dire dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$. En effet :

- pour les suites u et v de terme général $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$ et $v_n = -n$, la somme $u + v$ tend vers 0 ;
- pour les suites u et v de terme général $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n$ et $v_n = -2n$, la somme $u + v$ tend vers $-\infty$.

II.2 Limite d'un produit

Proposition (produit de deux suites convergentes)

Le produit de deux suites convergentes est une suite convergente de limite le produit des limites, autrement dit : soient u et v deux suites, l et l' deux réels, si u et v convergent respectivement vers l et l' , alors uv est convergente de limite ll' .

Proposition (produit d'une suite divergeant vers $+\infty$ et d'une suite minorée par un réel strictement positif)

Le produit d'une suite qui tend vers $+\infty$ et d'une suite minorée par un réel strictement positif à partir d'un certain rang est une suite divergeant vers $+\infty$, autrement dit : soient u et v deux suites, m un réel strictement positif, si u tend vers $+\infty$ et v est minorée par m à partir d'un certain rang, alors uv diverge vers $+\infty$.

En appliquant aux couples de suites $(-u, v)$, $(u, -v)$ et $(-u, -v)$, on obtient des résultats analogues pour le produit d'une suite divergente et d'une suite minorée par un réel strictement positif ou majorée par un réel strictement négatif.

Le tableau suivant rassemble les différents cas de figure :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$ \diagdown $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	0	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = 0$	0	FI	FI
$l \neq 0$	0	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	FI	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	FI	$\pm\infty$	$-\infty$	$+\infty$

En résumé, dans $\overline{\mathbb{R}}$, aux formes indéterminées près, la limite d'un produit est le produit des limites.

Remarque. On ne peut rien dire dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. En effet :

- pour les suites u et v de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1$ et $v_n = \frac{1}{n + 1}$, le produit uv tend vers 1 ;

- pour les suites u et v de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^2$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$, le produit uv tend vers $+\infty$.

II.3 Limite de l'inverse - Limite d'un quotient

Proposition (inverse d'une suite convergente de limite non nulle)

L'inverse d'une suite convergente de limite non nulle est défini à partir d'un certain rang et converge vers l'inverse de la limite, autrement dit : soit u une suite, l un réel non nul, si u converge vers l , alors $\frac{1}{u}$ est définie à partir d'un certain rang et converge de limite $\frac{1}{l}$.

Proposition (inverse d'une suite convergente de limite nulle)

- L'inverse d'une suite convergente de limite nulle et strictement positive à partir d'un certain rang est défini à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$, autrement dit : soit u une suite, si u tend vers 0, et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u}$ est définie à partir d'un certain rang et diverge vers $+\infty$.
- L'inverse d'une suite convergente de limite nulle et strictement négative à partir d'un certain rang est défini à partir d'un certain rang et diverge vers $-\infty$, autrement dit : soit u une suite, si u tend vers 0, et si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u}$ est définie à partir d'un certain rang et diverge vers $-\infty$.

Proposition (inverse d'une suite divergeant vers $\pm\infty$)

- L'inverse d'une suite qui tend vers $+\infty$ est défini à partir d'un certain rang et converge vers 0.
- L'inverse d'une suite qui tend vers $-\infty$ est défini à partir d'un certain rang et converge vers 0.

En combinant les résultats concernant le produit de limites, on obtient le tableau suivant :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	0	$l' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \text{FI}$	0	0	0
$l \neq 0$	$\pm\infty$	$\frac{l}{l'}$	0	0
$+\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	FI
$-\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	FI

En résumé, dans $\overline{\mathbb{R}}$, aux formes indéterminées près, la limite d'un quotient est le quotient des limites.

Remarque. On ne peut rien dire (entre autres) dans le cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. En effet :

- pour les suites u et v de terme général $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, le quotient $\frac{u}{v}$ tend vers $+\infty$;
- pour les suites u et v de terme général $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ et $v_n = \frac{1}{n+1}$, le quotient $\frac{u}{v}$ tend vers 0.

II.4 Levée d'une indétermination

La technique consiste à factoriser par le terme prépondérant (dans le cas d'une expression polynomiale) ou les termes prépondérants (dans le cas d'une expression rationnelle).

Exercice

Déterminer la limite des suites u et v de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^3 - n^2 - 4n - 1$ et $v_n = \frac{2n^2 + 1}{-n^2 + 3}$.

III Théorèmes d'existence

Cette section regroupe des résultats qui permettent d'affirmer l'existence, sous certaines conditions, de la limite d'une suite.

III.1 Théorèmes d'encadrement, majoration, minoration

Théorème (limite par encadrement)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites, $l \in \mathbb{R}$,
si

- $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;
- et (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l ,

alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite l .

Exercice

Déterminer la limite de la suite u de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\sqrt{n} + 1 + (-1)^n}{n + 2}$.

Théorème (limite par majoration, minoration)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites,

- si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors (v_n) tend vers $+\infty$
- si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et (v_n) tend vers $-\infty$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$

Exercice

Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 3 \sin(n)$.

III.2 Théorème de la limite monotone

Théorème (théorème de la limite monotone)

- Toute suite croissante majorée converge, plus précisément, si u est une suite croissante majorée, alors u converge vers $l = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice

Démontrer le théorème de la limite monotone.

Remarque. On dispose d'un résultat analogue pour les suites décroissantes.

Exercice

Montrer que la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ converge. Préciser sa limite.

III.3 Suites extraites

Définition (suite extraite)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, on appelle *suite extraite* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Exemple.

- Avec $\varphi : n \mapsto n + 1$, on retrouve la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.
- Avec $\varphi : n \mapsto 2n$ (respectivement $\varphi : n \mapsto 2n + 1$), on retrouve la sous-suite des termes d'indices pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ (respectivement la sous-suite des termes d'indices impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$).

Exercice

Montrer que si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

On sait déjà que si une suite u tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors les sous-suites des termes d'indices pairs et impairs tendent également vers l . Réciproquement :

Proposition

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, si les sous-suites des termes d'indices pairs et impairs tendent vers l , alors la suite u tend également vers l .

Exercice

Montrer que la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + 1$ converge et déterminer sa limite.

III.4 Suites adjacentes

Définition (suites adjacentes)

Soient u et v deux suites, elles sont dites *adjacentes* si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$;
- la suite u est croissante et la suite v est décroissante ;
- la suite $v - u$ tend vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Remarque. La première hypothèse est conséquence des deux autres, elle permet néanmoins d'orienter le travail en sachant d'emblée laquelle des suites est croissante. Par ailleurs, c'est souvent la première chose que « l'on voit ».

Théorème (limite des suites adjacentes)

Soient u et v deux suites, si elles sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite. Plus précisément, en notant l la limite commune, et dans le cas où u est croissante et v décroissante, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n.$$

Exercice

Montrer que les suites u et v de terme général : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont convergentes.

Séance 3 : Limites de fonctions

Cours

Dans cette séance, nous considérerons des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Nous noterons $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition d'une telle fonction f .

Pour la Sup

I Définitions et premières propriétés

I.1 Définitions en termes de voisinage

Définition (voisinage d'un élément de $\mathbb{R}$)

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on appelle *voisinage* de a :

- tout intervalle de la forme $] -\infty, A[$ (avec A réel) si $a = -\infty$;
- tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (avec A réel) si $a = +\infty$;
- tout intervalle ouvert centré en a , i.e. de la forme $]a - h, a + h[$ (avec $h > 0$ réel) si $a \in \mathbb{R}$.

Définition (fonction définie au voisinage d'un élément de $\mathbb{R}$)

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que :

- f est *définie au voisinage* de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que $(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{V}) \setminus \{a\}$ soit l'un des trois ensembles suivants : $[a - h, a[$; $]a, a + h]$ ou $[a - h, a + h] \setminus \{a\}$;
- f est *définie au voisinage* de $a = \pm\infty$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f soit définie sur $\mathcal{V}$.

Exercice

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est définie au voisinage de a :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$ avec $a = 1$;
2. $f : x \mapsto \sqrt{1 - x}$ avec $a = -\infty$.

Plus généralement :

Définition (propriété vraie au voisinage d'un élément de $\mathbb{R}$)

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $\mathcal{P}$ une propriété.

On dit que f *vérifie $\mathcal{P}$ au voisinage* de a si f est définie au voisinage de a et s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{V}$.

Exercice

Montrer que $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ et $x \mapsto x + 1$ sont égales au voisinage de $a = 1$.

Théorème - Définition (limite d'une fonction en un élément de $\overline{\mathbb{R}}$)

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet pour limite l en a si f est définie au voisinage de a et si pour tout voisinage $\mathcal{V}_l$ de l , il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{V}_a$, $f(x) \in \mathcal{V}_l$.

Si f possède une limite en a , alors elle est unique, on la note $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou plus simplement $\lim_a f$.

Si de plus $a \in \mathcal{D}_f$, alors nécessairement, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Exercice

Démontrer l'unicité de la limite dans le cas réel.

Proposition (caractère local de la notion de limite)

Soient f et g deux fonctions, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f et g sont égales au voisinage de a , et si g admet l pour limite en a , alors f admet aussi l pour limite en a .

Nous allons, dans la suite de cette section, décliner la définition très générale que nous avons donnée dans les différents cas de figure.

I.2 Limites infinies

Définition

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers $+\infty$ en a si f est définie au voisinage de a et si :

- pour $a = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f, x \leq B \implies f(x) \geq A$;
- pour $a = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq B \implies f(x) \geq A$;
- pour $a \in \mathbb{R}$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A$.

Remarques.

1. Dans la définition précédente, on peut remplacer $\forall A \in \mathbb{R}$ par $\forall A \in \mathbb{R}_+$.
2. Nous avons énoncé la définition avec des inégalités larges, conformément au programme de Classes Préparatoires. On peut néanmoins les remplacer par des inégalités strictes.

Exercice

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle tend vers $+\infty$ en a :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ avec $a = 1$;
2. $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ avec $a = +\infty$.

Remarques.

1. En considérant $-f$, on obtient la définition d'une fonction qui tend vers $-\infty$ en a .
2. Si une fonction f tend vers $\pm\infty$ en $a \in \mathbb{R}$, alors f ne peut pas être définie en a .
3. Une fonction comme $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui n'admet pas de limite en 0, pousse à distinguer le cas où l'on se rapproche du point par la gauche ou par la droite. Nous le présentons plus loin.

Proposition (limite infinie et caractère localement majoré/minoré)

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si f tend vers $-\infty$ en a , alors f est majorée par un réel strictement négatif au voisinage de a ;
- si f tend vers $+\infty$ en a , alors f est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a .

I.3 Limites finies

Définition

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f tend vers l en a si f est définie au voisinage de a et si :

- pour $a = -\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f, x \leq B \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$;
- pour $a = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq B \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$;
- pour $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Dans ce cas, on dit f admet une limite finie en a .

Exercice

Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle tend vers l en a :

1. $f : x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ avec $a = +\infty$ et $l = 0$;
2. $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ avec $a = 1$ et $l = 2$.

Remarques.

Anticipons un instant sur la séance 4 en relevant les deux points suivants :

- si f admet une limite finie en a et si $a \in \mathcal{D}_f$, alors nécessairement, $l = f(a)$.

On dit dans ce que f est continue en a ;

- une fonction comme $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, non définie en $a = 1$, mais qui admet une limite finie en a , pose la question du prolongement.

Nous reprendrons ces considérations en détail dans la séance 4.

Proposition (limite finie et caractère localement borné)

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a .

Exercice

Montrer la proposition dans le cas où $a = +\infty$.

Proposition

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soient l et m deux réels.

Si f tend vers l en a et si $l > m$, alors $f > m$ au voisinage de a .

Corollaire

Soit f une fonction, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f admet une limite finie non nulle en a , alors f ne s'annule pas au voisinage de a .

Corollaire (passage à la limite dans les inégalités)

Soient f et g deux fonctions, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f et g admettent une limite finie en a et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a , alors $\lim_a f \leq \lim_a g$.

Remarques.

1. Le corollaire précédent sert souvent dans le cas où l'une des deux fonctions est constante.
2. Les inégalités strictes ne survivent pas au passage à la limite, il suffit de considérer par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ en $+\infty$.

I.4 Limite à gauche/à droite en un réel

Définition (restriction d'une fonction)

Soit f une fonction, $\mathcal{D}$ une partie de $\mathcal{D}_f$.

On appelle *restriction de f à $\mathcal{D}$* , notée $f|_{\mathcal{D}}$, la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par : $\forall x \in \mathcal{D}, f|_{\mathcal{D}}(x) = f(x)$.

Définition (limite à gauche en un réel)

Soit f une fonction, soit $a \in \mathbb{R}$, soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet l pour limite à gauche en a si $f|_{\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[}$ admet l pour limite en a .

Dans ce cas, on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{a^-} f$ cette limite.

Concrètement, on a les définitions suivantes :

- pour $l = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, a - \eta \leq x < a \implies f(x) \leq A$;
- pour $l = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, a - \eta \leq x < a \implies f(x) \geq A$;
- pour $l \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, a - \eta \leq x < a \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Exercice

Montrer que $\lim_{0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Remarque.

Par définition, si f admet une limite à gauche en a , alors $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle de la forme $]a - h, a[$ (avec $h > 0$). On dit dans ce cas que f est définie au voisinage de a à gauche.

Définition (limite à droite en un réel)

Soit f une fonction, soit $a \in \mathbb{R}$, soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f admet l pour limite à droite en a si $f|_{\mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[}$ admet l pour limite en a .

Dans ce cas, on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{a^+} f$ cette limite.

Concrètement, on a les définitions suivantes :

- pour $l = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, a < x \leq a + \eta \implies f(x) \leq A$;
- pour $l = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, a < x \leq a + \eta \implies f(x) \geq A$;
- pour $l \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathcal{D}_f, a < x \leq a + \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$.

Exercice

Montrer que $\lim_{0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Remarque.

Par définition, si f admet une limite à droite en a , alors $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle de la forme $]a, a + h[$ (avec $h > 0$). On dit dans ce cas que f est définie au voisinage de a à droite .

Proposition (caractérisation de la limite à l'aide des limites à gauche et à droite)

Soit f une fonction, soit $a \in \mathbb{R}$, soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f est définie au voisinage de a à gauche et à droite .

- Si $a \notin \mathcal{D}_f$, alors : $\lim_a f = l \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = l$.
- Si $a \in \mathcal{D}_f$, alors : $\lim_a f = l \iff \lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = l$ et $l = f(a)$.

Exercice

Démontrer la proposition précédente dans le cas où $a \in \mathcal{D}_f$.

Remarque.

On déduit de ce qui précède que $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice

Étudier la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ 3 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$.

II Opérations sur les limites

Les résultats concernant la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions sont les mêmes que ceux pour les suites. Pour ne pas alourdir notre propos, nous nous concentrerons donc uniquement sur l'opération de composition.

Définition (composée de deux fonctions)

Soient f et g deux fonctions. On suppose que f est à valeurs dans $\mathcal{D}_g$, i.e. : $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \in \mathcal{D}_g$, ce que l'on note $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.

On appelle *composée de f suivie de g* la fonction, notée $g \circ f$, définie sur $\mathcal{D}_f$ par : $\forall x \in \mathcal{D}_f, g \circ f(x) = g(f(x))$.

Proposition (limite d'une composée)

Soient f et g deux fonctions, on suppose que f est à valeurs dans $\mathcal{D}_g$, soient $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si :

- $\lim_a f = b$,
- et $\lim_b g = c$,

alors : $\lim_a (g \circ f) = c$.

Exercice

Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{\frac{x^2+1}{2-x}}$.

III Théorèmes d'existence

Cette section regroupe des résultats qui permettent d'affirmer l'existence, sous certaines conditions, de la limite d'une fonction.

III.1 Théorèmes d'encadrement, majoration, minoration

Théorème (limite par encadrement)

Soient f, g, h trois fonctions, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $l \in \mathbb{R}$.

Si

- $g \leq f \leq h$ au voisinage de a ,
- et $\lim_a g = \lim_a h = l$,

alors f admet une limite en a , à savoir : $\lim_a f = l$.

Exercice

Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{x + \cos x}{x - 2}$.

Théorème (limite par majoration, minoration)

Soient f, g, h trois fonctions, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- si $f \leq h$ au voisinage de a et $\lim_a h = -\infty$, alors f admet une limite en a , à savoir : $\lim_a f = -\infty$.
- si $g \leq f$ au voisinage de a et $\lim_a g = +\infty$, alors f admet une limite en a , à savoir : $\lim_a f = +\infty$.

Exercice

Déterminer la limite en $-\infty$ de $x \mapsto e^{|x|}e^{\sin x}$.

Pour la Sup

III.2 Théorème de la limite monotone

Théorème (théorème de la limite monotone)

Soit f une fonction croissante définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

1. f admet une limite en a , plus précisément :

- si f est minorée, alors $\lim_a f = \inf\{f(x), x \in I\}$;
- si f n'est pas minorée, alors $\lim_a f = -\infty$.

2. f admet une limite en b , plus précisément :

- si f est majorée, alors $\lim_b f = \sup\{f(x), x \in I\}$;
- si f n'est pas majorée, alors $\lim_b f = +\infty$.

3. Pour tout $c \in]a, b[$, f admet une limite finie à gauche et à droite en c , de plus : $\lim_{c-} f \leq f(c) \leq \lim_{c+} f$.

Exercice

Démontrer le théorème de la limite monotone.

Remarque.

On dispose d'un résultat analogue pour les fonctions décroissantes.

III.3 Utilisation des suites

Théorème (caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction)

Soient f une fonction, $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_a f = l$.
2. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans $\mathcal{D}_f$, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite l .

Exercice

Démontrer le théorème précédent dans le cas $a, l \in \mathbb{R}$.

Remarque.

Ce résultat est souvent utilisé pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a .

Exercice

Montrer que $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Séance 4 : Continuité

Cours

Dans cette séance, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, et nous considérerons des fonctions définies sur I , à valeurs réelles. Une telle fonction f est donc définie au voisinage de chacun des points de I .

Pour la Sup

I Définitions et premières propriétés

Définition - Proposition (continuité en un réel)

Soit f une fonction, soit $a \in I$.

Si f admet une limite finie en a , alors cette limite est égale à $f(a)$.

Dans ce cas, on dit que f est *continue en a* .

Formellement, la continuité de f en a se traduit par l'énoncé suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Exercice

1. Établir la proposition précédente.
2. Montrer qu'une fonction affine est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Définition (continuité sur un intervalle)

Soit f une fonction, on dit que f est *continue sur I* ssi f est continue en tout point de I .

Pour la Sup

Exercice

Montrer que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarques.

- On admet sans démonstration que les fonctions circulaires, exponentielle et logarithme népérien sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.
- On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition (continuité à gauche/ à droite en un réel)

Soit f une fonction, soit $a \in I$. On suppose que f est définie au voisinage de a à gauche et à droite.

- On dit que f est *continue à gauche en a* si $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ est continue en a , i.e. si : $\lim_{a^-} f = f(a)$.
- On dit que f est *continue à droite en a* si $f|_{I \cap [a, +\infty[}$ est continue en a , i.e. si : $\lim_{a^+} f = f(a)$.

Proposition (caractérisation de la continuité à l'aide de la continuité à gauche et à droite)

Soit f une fonction, soit $a \in I$. On suppose que f est définie au voisinage de a à gauche et à droite. f est continue en a ssi f est continue à gauche et à droite en a .

Exercice

Étudier la continuité de la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$.

Théorème - Définition (prolongement par continuité en un réel)

Soit f une fonction, $a \in \mathbb{R}$ n'appartenant pas à I .

Si f admet une limite finie l en a , alors la fonction $\bar{f}$ définie sur $I \cup \{a\}$ par : $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$

est continue en a .

On dit alors que $\bar{f}$ est un *prolongement par continuité* de f en a , ou encore que f *prolongeable par continuité* en a .

Exercice

1. Établir le théorème dans le cas où $I =]a, +\infty[$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x}$ admet un prolongement par continuité en 0.

Théorème (caractérisation séquentielle de la continuité en un réel)

Soient f une fonction, $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en a .
2. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite a à valeurs dans I , la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite $f(a)$.

Exercice

Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
On admettra que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

En ce qui concerne les opérations, ce que nous avons dit sur les limites de fonctions se particularise pour la continuité en un réel ou sur un intervalle. Autrement dit (pourvu que les opérations aient un sens) :

- la somme et le produit de deux fonctions continues sont continus,
- l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continu,
- la composée de deux fonctions continues est continue.

En particulier, les fonctions polynomiales et rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur ensemble de définition.

Pour la Sup

Exercice

Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II Deux théorèmes fondamentaux

II.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (théorème des valeurs intermédiaires)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f .

Pour la Sup

Exercice

Démontrer le théorème.

Nous allons reformuler le théorème des valeurs intermédiaires en termes d'intervalles. Avant cela, commençons par donner une définition :

Définition (image d'une partie par une fonction)

Soit f une fonction, soit A une partie de I .

- On appelle *image de A par f* , notée $f(A)$, l'ensemble des images des éléments de A par f , i.e. :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\}.$$

- On appelle *image de f* l'image de I par f . On la note souvent $\text{Im } f$ en lieu et place de $f(I)$.

Poursuivons en caractérisant les intervalles de $\mathbb{R}$:

Proposition (caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$)

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties convexes de $\mathbb{R}$, i.e., les parties I de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in I, \forall y \in I, [x, y] \subset I$.

Théorème (TVI, reformulation)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

L'ensemble $f(I)$ est un intervalle.

Commentaire. Autrement dit, l'image continue d'un intervalle est un intervalle.

Exercice

Démontrer la reformulation du TVI.

Théorème (TVI strictement monotone, version « compacte »)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

- Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Plus précisément : tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un unique antécédent par f .
- Si f est strictement décroissante sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$. Plus précisément : tout réel compris entre $f(b)$ et $f(a)$ admet un unique antécédent par f .

Ce théorème se généralise à des intervalles quelconques. Dans la suite, pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, nous notons (par commodité, et uniquement pour ce théorème) (a, b) l'intervalle d'extrémités a et b , les extrémités pouvant ne pas être comprises.

Théorème (TVI strictement monotone, version générale)

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, soit $f \in \mathcal{C}((a, b), \mathbb{R})$.

- Si f est strictement croissante sur (a, b) , alors $f((a, b)) = (\lim_a f, \lim_b f)$.
Plus précisément : pour tout réel $\lambda \in (\lim_a f, \lim_b f)$, il existe un unique $x \in (a, b)$, tel que $f(x) = \lambda$.
- Si f est strictement décroissante sur (a, b) , alors $f((a, b)) = (\lim_b f, \lim_a f)$.
Plus précisément : pour tout réel $\lambda \in (\lim_b f, \lim_a f)$, il existe un unique $x \in (a, b)$, tel que $f(x) = \lambda$.

Pour la Sup

II.2 Le théorème des bornes atteintes

Théorème (théorème des bornes atteintes)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

On a : $f([a, b]) = \left[\min_{[a, b]} f, \max_{[a, b]} f \right]$.

Autrement dit : toute fonction continue sur un segment est bornée, atteint ses bornes ainsi que toute valeur comprise entre ses bornes.

Commentaire. L'image continue d'un segment est donc un segment.

Exercice

Montrer que $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x}$ possède un minimum sur $]0, \pi]$.