

Exercice 1 : calcul de limites

Déterminer les limites suivantes. Interpréter graphiquement le résultat lorsque c'est possible.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 + \frac{1}{x} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2x + 1 + \frac{1}{x} \right)$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right)$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{(x - 1)^2} \right)$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x + 1}{4 - x^2} \right)$
- g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} \right)$
- i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x} + 3} \right)$ j) $f(x) = \frac{(3 + 2x)^5 - 1}{x + 1}$ et $a = -1$

Solution

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + 1 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + 1 + \frac{1}{x} \right) = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x} \right) = 0$ donc, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \right) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{x} \right) = -\infty$ donc on a une FI du type " $\infty - \infty$ "

$$\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} - 2) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ donc, par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{x} \right) = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

e) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 3) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 = 0^+$ donc, par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 3}{(x - 1)^2} \right) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) = 0$

Il faut étudier le signe de $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
signe de $4 - x^2$		$-$	$+$	$-$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x^2) = 0^+$ donc, par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{2x + 1}{4 - x^2} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (4 - x^2) = 0^-$ donc, par limite de quotient, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{2x + 1}{4 - x^2} \right) = -\infty$

La droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe.

g) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x - 2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$

Or $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ donc $\frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = x+2$ si $x \neq 1$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+x-2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = \boxed{3}$

h) $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1} - 2) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$

Or $\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2}$ si $x \neq 3$

Donc $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right) = \boxed{\frac{1}{4}}$

i) FI du type " $\frac{\infty}{\infty}$ ". $\forall x > 0$: $\frac{x+1}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}} \right)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{x}}}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc par limite de somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ donc par limite de somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = 1$

Donc, par limite de quotient $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}+3} = +\infty}$

j) $f(x) = \frac{(3+2x)^5 - 1}{x+1} = \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)}$ avec $g(x) = (3+2x)^5$

Or g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables donc g est dérivable en -1 et

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = g'(-1)$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 5 \times 2 \times (3+2x)^4$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 10}$

Exercice 2 : limite à l'infini de fonctions polynômes et rationnelles

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 5x - 4)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 4x^3 + 2x - 1)$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4-5x}{2+3x} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-5}{x^2-3x+4} \right)$

Solution

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 5x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = \boxed{-\infty}$ (limite à l'infini d'une fonction polynôme)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 4x^3 + 2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = \boxed{+\infty}$ (limite à l'infini d'une fonction polynôme)

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4-5x}{2+3x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-5x}{3x} \right) = \boxed{-\frac{5}{3}}$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle)

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-5}{x^2-3x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = \boxed{0}$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle)

Exercice 3 : théorème des gendarmes

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{x^2 + \cos x}{2x^3}$

b) $f(x) = 3 + \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}$

Solution

a) $\forall x \in \mathbb{R}^* : -1 \leq \cos x \leq 1$ donc $x^2 - 1 \leq x^2 + \cos x \leq x^2 + 1$

$\forall x > 0 : \frac{x^2-1}{2x^3} \leq \frac{x^2+\cos x}{2x^3} \leq \frac{x^2+1}{2x^3}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et, de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2x^3} = 0$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle).

Donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\forall x < 0 : \frac{x^2 - 1}{2x^3} \geq \frac{x^2 + \cos x}{2x^3} \geq \frac{x^2 + 1}{2x^3}$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$ et, de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^3} = 0$ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle).

Donc, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3 + \sin \frac{1}{x^2}}{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \text{ donc } -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \text{ donc } 3 - \frac{1}{x^2} \leq 3 + \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} \leq 3 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \text{ donc, par encadrement, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\text{De même } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \text{ donc, par encadrement, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

Exercice 5 : théorème de comparaison

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3(\sin x)^2)$

Solution

$$\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leq (\sin x)^2 \leq 1 \text{ donc } 0 \leq 3(\sin x)^2 \leq 3 \text{ donc } x^2 \leq x^2 + 3(\sin x)^2 \leq x^2 + 3$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ donc, par comparaison, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3(\sin x)^2) = +\infty$$

Exercice 6 : limite de fonctions composées

Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{18x - 5}{2x + 1}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$$

Solution

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{18x - 5}{2x + 1}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{18x}{2x}\right) = 9 \text{ (limite à l'infini d'une fonction rationnelle) et } \lim_{X \rightarrow 9} \sqrt{X} = 3 \text{ donc, par limite de composée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{18x - 5}{2x + 1}} = 3$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ (limite à l'infini d'une fonction polynôme) et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty \text{ donc, par limite de composée, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Donc, par limite de somme, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1}) = -\infty$$

c) On a une FI du type " $\infty - \infty$ "

$$x - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Par limite de composée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty \text{ donc, par limite de somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1}) = +\infty \text{ donc, par limite de quotient, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1} = 0$$