

Vecteurs et combinaisons linéaires

35 On considère un parallélogramme DEFG.
Construire le point K tel que $\overrightarrow{DK} = 2\overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DF}$.

36 On considère le cube ABCDEFGH.
Construire le point X tel que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

37 Dans le tétraèdre ABCD.
Construire le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

46 On considère trois points de l'espace A, B et C non alignés et les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$$

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points C, M et N sont alignés.

48 Dans l'espace, on considère les points A, B, C, D et E et le réel k tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Pour quelle valeur du réel k les points A, D et E sont-ils alignés ?

49 Dans un cube ABCDEFGH, les points J, M, P et Q sont les milieux des segments [BC], [EF], [GH] et [EH].
Dans chacun des cas décomposer le vecteur donné en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

- a) $\overrightarrow{BH}$ b) $\overrightarrow{BP}$ c) $\overrightarrow{BQ}$ d) $\overrightarrow{GJ}$ e) $\overrightarrow{CE}$ f) $\overrightarrow{AM}$

Droites et plans

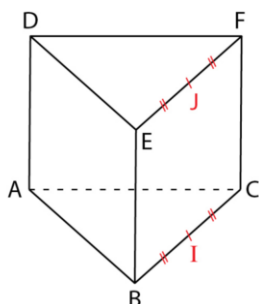
43 ABCD est un tétraèdre.
I est le milieu de [BC], les points E, F et G sont définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}.$$

- a) Réaliser une figure.
- b) Démontrer que $\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FE}$.
- c) Le point E appartient-il à la droite (FG) ? Justifier la réponse.

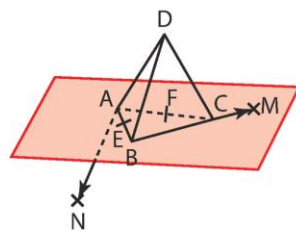
52 ABCDEF est le prisme droit représenté ci-contre.
I et J sont les milieux des arêtes [BC] et [EF].

M est le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{JC}$.
Démontrer que le point M appartient au plan (A ; $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AI}$).

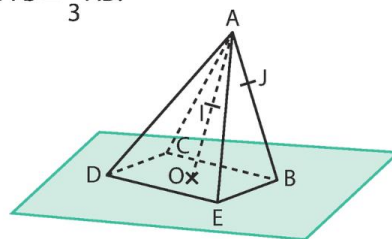


50 Dans un tétraèdre ABCD, on considère les points E et F milieux respectifs des segments [AB] et [AC] et on construit les points M et N tels que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DE}$.

1. Déterminer la nature des quadrilatères MCEF et ADEN.
2. Montrer que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF}$
3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DN}$?



52 On considère une pyramide ABCDE de base le parallélogramme BCDE. Le point O est le centre du parallélogramme, le point I est le milieu du segment [AO] et le point J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.



1. Justifier les relations suivantes : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IE}$, $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE}$.
2. En déduire que la droite (IJ) passe par le point D.

Positions relatives

41 Dans un cube ABCDEFGH, donner les positions relatives des droites :

- a) (CF) et (AE). b) (AC) et (DH).
c) (BF) et (AC). d) (AH) et (CD).

42 Dans un cube ABCDEFGH, donner les positions relatives de la droite et du plan :

- a) (AB) et (CDE). b) (CE) et (DGH).
c) (BF) et (DEG). d) (EG) et (ABC).

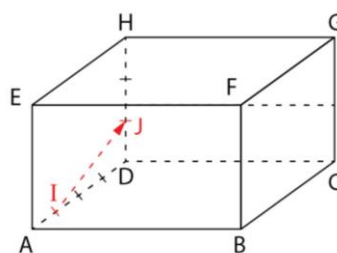
43 Dans un cube ABCDEFGH, donner les positions relatives des plans :

- a) (ABG) et (DEH). b) (ACH) et (BEG).
c) (ABE) et (FGH). d) (CEF) et (DGH).

58 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre.

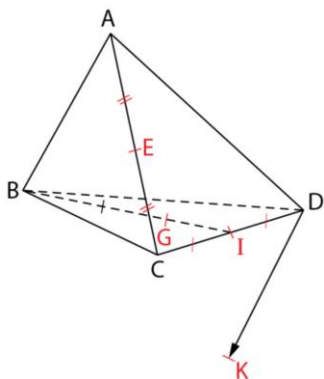
I et J sont les points définies par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.

- a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont coplanaires.
- b) En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (BCG).



87 ABCD est un tétraèdre. E est le milieu de [AC] et I celui de [CD]. K est le point tel que $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{AB}$ et G est le point tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.

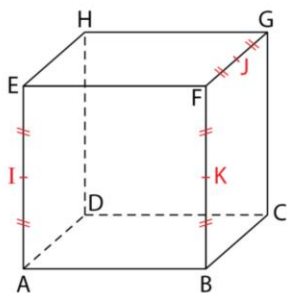
Démontrer que les points E, G et K sont alignés.



89 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AE], [FG] et [BF].

a) Démontrer que $\overrightarrow{IJ}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$.

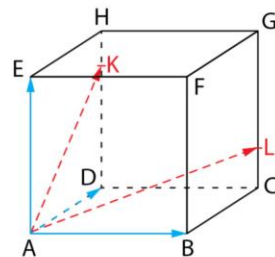
b) En déduire la position relative de la droite (IJ) par rapport au plan (AKD).



65 ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre, K et L sont les points tels que :

$$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DH} \text{ et } \overrightarrow{GL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}.$$

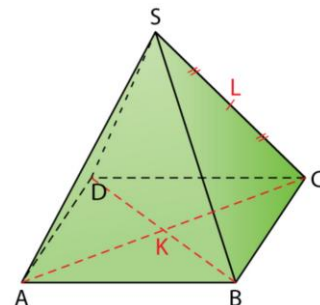
Décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



66 SABCD est une pyramide de base un parallélogramme ABCD. K est le centre de ABCD et L le milieu de [SC].

a) Justifier que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ est une base de l'espace.

b) Décomposer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{KL}$ dans cette base.



59 On considère un cube ABCDEFGH et les milieux M, N, P et Q respectivement des segments [CD], [EH], [BF] et [GH]. Donner les coordonnées des vecteurs suivants dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $\overrightarrow{AF}$ | b) $\overrightarrow{AQ}$ | c) $\overrightarrow{MP}$ |
| d) $\overrightarrow{CN}$ | e) $\overrightarrow{EM}$ | f) $\overrightarrow{NQ}$ |

Pour les exercices 69 à 71, un repère de l'espace est donné et on considère les points suivants :

A(1; 5; 2); B(-2; 3; 4); C(-2; -2; 0) et D(7; -3; 1).

69 Calculer les coordonnées :

- a) des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
b) des milieux des segments [AB] et [CD].

70 Déterminer les coordonnées du point K tel que ABCK soit un parallélogramme.

71 Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs :

a) $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ b) $\vec{v} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BC}$

74 Dans un repère de l'espace, on donne les points : A(-4; -3; 1), B(0; 3; -5), C(2; 1; 1) et D(3; 5; -5). Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

77 $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

On donne les points :

$$A(1; 0; 3), B(3; -1; 2) \text{ et } M(x; y; -2)$$

avec x et y nombres réels.

Existe-t-il des valeurs de x et y telles que les points A, B et M soient alignés ?

Sections

44 Dans un cube ABCDEFGH, on considère les points M et N définis par les relations $\overrightarrow{HM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{FN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FG}$.

Construire la section du plan (EMN) sur le cube.

45 Dans une pyramide SABCD à base carrée ABCD, on place les points P et Q milieux respectifs des segments [SD] et [AB]. Construire la section du plan (CPQ) sur la pyramide. On justifiera toutes les étapes de la construction.

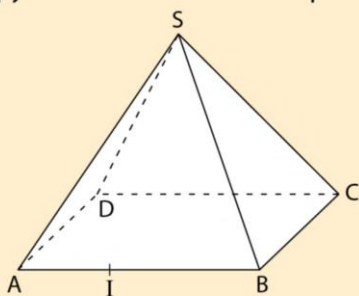
Bases et repères

60 SABCD est la pyramide à base carrée représentée ci-contre.

I est un point de [AB] distinct des points A et B.

Dire dans chaque cas si le triplet de vecteurs est une base de l'espace.

- | | |
|--|--|
| a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS})$ | b) $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SI})$ |
| c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ | d) $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD})$ |



55 On considère trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ qui forment une base de l'espace.

$$\text{On pose : } \vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\text{et } \vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Démontrer que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ forment une base de l'espace.

79 Dans un repère de l'espace, on donne le point $A(-1; 2; 3)$, les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 3)$ et $\vec{v}(0; 1; 3)$.

$\mathcal{P}$ est le plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

a) Démontrer que le point $B(1; -1; 0)$ appartient au plan $\mathcal{P}$.

b) Le point $C(-2; 7; 10)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

80 Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(1; -1; 2)$, $B(0; 3; -4)$ et les vecteurs $\vec{u}(1; 0; 1)$, $\vec{v}(0; 3; 5)$, $\vec{w}(1; 3; 6)$, $\vec{t}(2; -3; -3)$.

On note $\mathcal{P}$ le plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$, $\mathcal{Q}$ le plan $(B; \vec{w}, \vec{t})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

a) Démontrer que la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

b) Déterminer la position relative des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

96 d est la droite qui passe par le point $A(-1; 2; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; 0; 3)$.

d' est la droite qui passe par le point $B(-4; 5; 7)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-2; 6; 22)$.

M est le point de coordonnées $(-3; 2; -4)$.

a) Démontrer que le point M appartient à la droite d .

b) Le point M appartient-il à la droite d' ?

c) En déduire la position relative des droites d et d' .

99 On donne le point $A(1; -1; 3)$ et les vecteurs $\vec{u}(1; 1; 0)$ et $\vec{v}(2; -1; 3)$.

$\mathcal{P}$ désigne le plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan :

a) $(O; \vec{i}; \vec{j})$ b) $(O; \vec{i}; \vec{k})$ c) $(O; \vec{j}; \vec{k})$

101 On considère les points $A(0; 0; 1)$, $B(-3; 0; 0)$, $C(-1; -2; 0)$, $D(6; 0; -1)$ et $E(0; 3; 1)$.

1. a) Démontrer que les points A, B et C déterminent un plan, on le note $\mathcal{P}_1$.

b) Démontrer que les points O, D et E déterminent aussi un plan, on le note $\mathcal{P}_2$.

2. a) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OD}$ ne sont pas coplanaires.

b) Que peut-on en déduire pour les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?

103 $\mathcal{P}$ est le plan qui passe par le point $M(2; 1; -1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(1; -1; 0)$ et $\vec{v}(2; 0; 1)$.

d est la droite qui passe par le point $N(-2; 3; 5)$ et de vecteur directeur $\vec{w}(-1; 2; -3)$.

a) Démontrer que la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

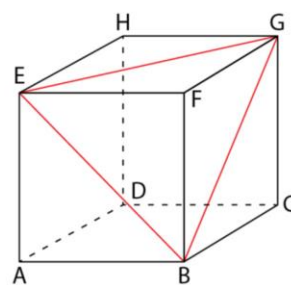
b) Justifier que leur point d'intersection est le point $K(-4; 7; -1)$.

104 ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessous. L'espace est muni du repère $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$.

1. Donner les coordonnées :

a) d'un vecteur directeur de la droite (DF) ;

b) de deux vecteurs directeurs du plan (EBG).



2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).

109 Prendre des initiatives

Représenter Raisonner

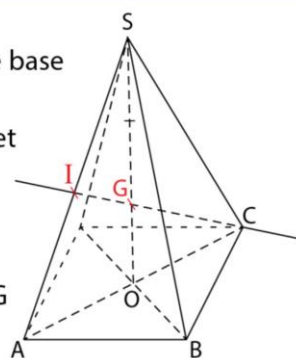
SABCD est une pyramide de base le carré ABCD de centre O.

I est le milieu de l'arête [SA] et

G est le point défini par :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SO}.$$

Démontrer que les points C, G et I sont alignés.



110 Imaginer une stratégie

Représenter Raisonner

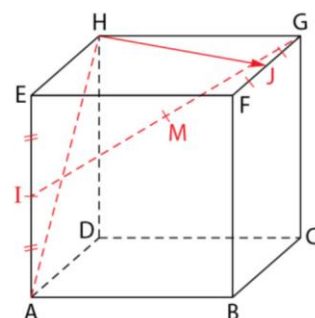
ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I et J sont les milieux des arêtes respectives [AE] et [FG].

M est le milieu du segment [IG].

a) Démontrer que le point M appartient au plan (AHJ).

b) En déduire la position relative de la droite (IG) et du plan (AHJ).



115 Démontrer la coplanarité de quatre points



Représenter Raisonner Calculer

Rédiger les différentes étapes de la recherche, sans omettre les fausses pistes et les changements de méthode.

Problème

ABCDEFGH est le cube représenté ci-contre.

I et J sont les centres respectifs des faces ABCD et BCGF. M est le milieu du segment [IJ].

Démontrer que les points B, C, M et H sont coplanaires.

