

Exercices primitives et équations différentielles

Term

3 a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{-1}{e^x + 1}$$

est une primitive de f .

b) Vérifier que la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par $G(x) = x \ln(x) - x$ est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' = \ln(x)$.

4 D'après l'exercice **3**, la fonction G définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$G(x) = x \ln(x) - x$$

est une primitive de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x)$.

a) Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

b) Déterminer la primitive G_1 de g sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Pour les exercices 27 et 28,

a) Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

b) Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en x_0 .

27 $F(x) = 3x^4 - \frac{2}{5}x^2 + x, \quad I = \mathbb{R}$

$$f(x) = 12x^3 - \frac{4}{5}x + 1, \quad x_0 = 1$$

28 $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad I = \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x_0 = -1$$

30 a) Démontrer que les fonctions :

$$\bullet x \mapsto \ln(5x) \quad \bullet x \mapsto 1 + \ln x \quad \bullet x \mapsto 3 - \ln\left(\frac{e}{x}\right)$$

sont des primitives sur $]0; +\infty[$ d'une même fonction f à préciser.

b) Déterminer la primitive F de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en e .

Pour les exercices 39 à 41, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

39 a) $f(x) = x + 1$ **b)** $f(x) = x^2 + 3x + 2$

40 a) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ **b)** $f(x) = 5\cos(x)$

41 a) $f(x) = 5e^x + 4$ **b)** $f(x) = -2(3x - e^x)$

43 Déterminer la primitive sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction f définie par :

a) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}} + 9e^x$ **b)** $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - \frac{4}{x}$

44 Reconnaître la forme $u'u^n$ et déterminer une primitive sur l'intervalle I de la fonction définie par :

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad I =]0; +\infty[$

b) $h(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 4)^5 \quad I = \mathbb{R}$

45 Dans chaque cas, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie par :

a) $f(x) = (x - 1)(x^2 - 2x + 4)^3$ **b)** $g(x) = e^{3x}(e^{3x} + 1)^4$

46 Reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$ et déterminer une primitive sur l'intervalle I de la fonction définie par :

a) $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}; \quad I = \mathbb{R}$

b) $h(x) = \frac{1}{x \ln(x)}; \quad I =]1; +\infty[$

49 Reconnaître la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ et déterminer une primitive sur l'intervalle I de la fonction définie par :

a) $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}; \quad I = \mathbb{R}$

b) $g(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}, \quad I =]0; \pi[$

50 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction.

a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **b)** $g(x) = \frac{9e^{3x}}{\sqrt{e^{3x} + 4}}$

53 f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{2}{x - 1}.$$

Déterminer la primitive F sur l'intervalle $]1; +\infty[$ qui s'annule en 2 de la fonction f .

97 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}.$$

a) Démontrer que pour tout réel x ,

$$f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

b) En déduire la primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 1$ de la fonction f .

Pour les exercices 60 à 62, résoudre sur $\mathbb{R}$ chaque équation différentielle.

60 a) $y' = 5y$ b) $y' = \frac{3}{4}y$ c) $y' = -8,2y$

61 a) $2y' = -5y$ b) $\theta' = -\frac{1}{2}\theta$ c) $4u' = 3u$

62 a) $5g - 7g' = 0$ b) $y' = y$ c) $-y' + 2y = 0$

Pour les exercices 63 à 65, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

63 $y' = 7y$ et $f(0) = 1$.

64 $y' + \frac{1}{4}y = 0$ et $f(3) = -1$.

65 $3y' = -7y$ et $f(2) = -5$.

67 Déterminer la solution g sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $2y' + 5y = 0$ telle que $g'(2) = 0$.

Pour les exercices 71 à 73, vérifier que la fonction f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

71 $f(x) = 7e^{3x} - \frac{2}{3}$; $y' = 3y + 2$

72 $f(x) = 2e^{-7x} - 2$; $y' + 7y + 14 = 0$

73 $f(x) = 5e^{-3x} + 3$; $3y + y' = 9$

75 (E) est l'équation différentielle $y' = -3y + 4$.

a) Déterminer une solution particulière constante g de (E).

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' = -3y$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

d) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(-1) = 0$.

Pour les exercices 78 et 79, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

78 $y' = 7y - 5$ et $f(-2) = -3$

79 $y' = 0,2y - 100$ et $f(0) = -2$

Pour les exercices 80 à 82, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle qui vérifie la condition donnée.

80 $y' = 4y - 3$ et $f'(0) = 3$

81 $-2y' + 11y = 4$ et $f'(-1) = 1$

82 $4y' - 5y = 2$ et $f'(0) = 0$

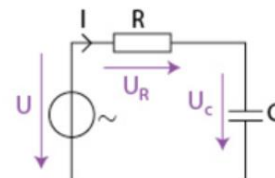
86 (E) est l'équation différentielle $y' + 2y = e^{3x}$.

a) Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$ est une solution particulière de (E).

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

106 Un circuit électrique comprend un générateur de force électromotrice E , un condensateur de capacité C et un conducteur ohmique de résistance R .



$q(t)$ est la charge du condensateur, en farad, t secondes après avoir établi le courant dans le circuit. On sait alors que la fonction q vérifie :

$$q' + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}.$$

1. a) Déterminer alors l'ensemble des solutions sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{RC}y = \frac{E}{R}$.

b) On suppose que la charge initiale du condensateur est nulle, ainsi $q(0) = 0$.

Pour tout réel $t \geq 0$, exprimer $q(t)$ en fonction de t .

2. a) Déterminer la charge maximum Q du condensateur sachant que celle-ci est la limite de la fonction q en $+\infty$.

b) On note $\tau = RC$. À quel pourcentage de sa charge maximum Q le condensateur est-il chargé après une durée de charge égale à τ ? égale à 5τ ? Arrondir à l'unité.

3. a) $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction q dans un repère d'origine O .

Vérifier que le point de coordonnées $(\tau; Q)$ appartient à la tangente à $\mathcal{C}$ en O .

b) À l'aide de la calculatrice, visualiser ce résultat lorsque $C = 1 \text{ F}$, $R = 100 \Omega$ et $E = 5 \text{ V}$.

108 On laisse tomber un corps de masse $m = 4$ kg dans le champ de la pesanteur. La vitesse v , en m.s^{-1} , du centre d'inertie de ce corps est fonction du temps t de chute, en s, et vérifie $mv' + kv = mg$ où $g = 9,8 \text{ N.kg}^{-1}$ est l'accélération de la pesanteur et $k = 24$ est le coefficient de freinage.

1. a) Justifier que la fonction v est solution sur $[0; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = -6y + 9,8$.

b) Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation (E).

2. a) On suppose que la vitesse initiale du corps est nulle. Pour tout réel $t \geq 0$, exprimer $v(t)$ en fonction de t .

b) Déterminer la vitesse du corps après 20 s.

Arrondir au dixième.

109 (E) est l'équation différentielle $y' + 4y = xe^{-x}$.

a) Déterminer des nombres réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une solution sur $\mathbb{R}$ de (E).

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle (E₀) : $y' + 4y = 0$.

c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E₀).

d) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

e) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(1) = 0$.

115 Utiliser des lectures graphiques



Raisonner Représenter

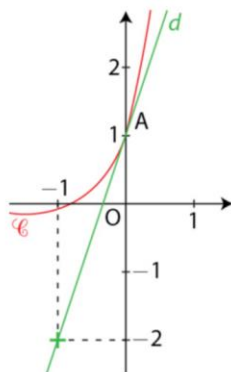
On considère les équations différentielles :

(E₁) : $y' = 2y$ et (E₂) : $y' = y$.

Dans le repère ci-contre, la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f = f_1 + f_2$, où f_1 est une solution (E₁) et f_2 une solution (E₂).

La droite d est la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

À partir des données lues sur le graphique, déterminer la fonction f .



121 Résoudre à l'aide d'une primitive

Raisonner Calculer

(E) est l'équation différentielle :

$$y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}.$$

a) g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x}g(x).$$

Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si,

pour tout réel x , $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

131 Équations différentielles du second ordre

(E) est l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ où a et b sont deux nombres réels.

1. Démontrer que si f_1 et f_2 sont deux solutions de l'équation différentielle (E), alors pour toutes constantes réelles C_1 et C_2 , la fonction $C_1f_1 + C_2f_2$ est aussi solution de (E).

On admet que toutes les solutions de (E) sont de la forme $C_1f_1 + C_2f_2$ où f_1 et f_2 sont deux solutions de (E) indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de constante réelle k telle que $f_1 = kf_2$.

2. r est un nombre réel.

On cherche les solutions de (E) de la forme $x \mapsto e^{rx}$. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{rx}$ est solution de (E) si, et seulement si, $r^2 + ar + b = 0$. Cette équation est l'équation caractéristique associée à (E).

3. On suppose que l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 .

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-r_1x}$.

a) Démontrer que la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si, la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$.

b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + (2r_1 + a)y = 0.$$

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + (2r_1 + a)y' = 0$.

d) Justifier que $r_1 + r_2 = -a$.

e) Déterminer alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

133 Équations différentielles et suites

Partie A

n est un entier naturel non nul et (E_n) est l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

g et h sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x , $g(x) = h(x)e^{-x}$.

a) Démontrer que la fonction g est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_n) si, et seulement si, pour tout réel x , $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_n).

c) Déterminer la solution f de (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

Partie B

f_0 et f_1 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = e^{-x} \text{ et } f_1(x) = xe^{-x}.$$

a) Vérifier que f_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, f_n est la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$. En utilisant la partie A, démontrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$