

Capacité 7 p 173

Solution commentée

1. Pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $x - 1 \leq x + \cos(x) \leq x + 1$,
soit $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

2. a. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$.

L'inégalité $f(x) \leq x + 1$ ne permet pas de déterminer la limite de f en $+\infty$.

On peut en effet trouver des fonctions vérifiant cette inégalité et de limites différentes.

Par contre, l'inégalité $x - 1 \leq f(x)$ permet d'appliquer l'un des théorèmes de comparaison :

$$x - 1 \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b. On sait que pour tout réel x , $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

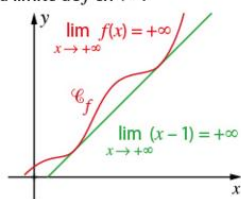
On doit diviser chaque membre de cet encadrement par x et donc se placer dans un intervalle où on connaît le signe de x .

Comme on cherche la limite en $+\infty$, on se place dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\text{Pour tout réel } x > 0, \frac{x-1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{x+1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\text{Donc d'après le théorème des gendarmes, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$



Capacité 8 p 167

Solution commentée

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ (par croissances comparées) donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x e^x) = 2$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On transforme l'expression $e^x - x$ en factorisant par x .

$$\text{Pour } x \neq 0, e^x - x = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (par croissances comparées) donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty.$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$. D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = +\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: on est en présence de la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». On transforme l'expression $(-x^2 + 1)e^x$ en la développant.

$$\text{Pour tout réel } x, (-x^2 + 1)e^x = -x^2 e^x + e^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 e^x + e^x) = 0. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x = 0.$$

$$\text{d. Pour } x \neq 0, \frac{e^{3x}}{x} = 3 \times \frac{e^{3x}}{3x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc par composition } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{3x} = +\infty$$

$$\text{et par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 \times \frac{e^{3x}}{3x} \right) = +\infty. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} = +\infty.$$

N°104 p 183

104. 1. Pour tout réel x , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $-2 \leq 2\sin(x) \leq 2$
et par suite, $-2 + x \leq f(x) \leq 2 + x$.

2. Pour tout réel x ,

$$-2 + x \leq f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 + x) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Pour tout réel $x > 0$, $-\frac{2}{x} + 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{x} + 1$.

$$\text{D'après le théorème des gendarmes, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

N° 108 p 183

108. 1. Pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 0[$, $1 \leq f(x) \leq 2$
donc $3 \leq 2f(x) + 1 \leq 5$ donc $\frac{3}{x} \geq \frac{2f(x)+1}{x} \geq \frac{5}{x}$ (car $x < 0$).

Par conséquent, $\frac{5}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}$.

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty.$$

N°110 à 117 p 183

$$110. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x e^x + 2e^x - 1) = -1.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2 x - x^3 e^x) = +\infty.$$

$$111. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x} \right) = -\infty.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2} \right) = +\infty.$$

$$112. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x} e^x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty.$$

$$113. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x^2 e^x} = 0.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-3x}{e^x} = 0.$$

$$114. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x e^x - e^x) = 0.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x + x e^x + 3e^x) = 0.$$

$$115. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3 - 2 \frac{e^x}{x^2} \right) = -\infty.$$

$$116. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - x e^x) = 0.$$

$$117. \text{ a. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x e^{3x}) = 0.$$

$$\text{ b. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) e^{2-x} = 0.$$

Solution commentée

1. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-2x}$.

On a donc $f' = u'v + uv'$.

Ainsi, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-2x} + x(-2e^{-2x}) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3. Pour tout réel x , $f(x) = xe^{-2x} = -\frac{1}{2}(-2xe^{-2x})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} Xe^X = 0$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2xe^{-2x}) = 0$.

Par suite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

4. On étudie le signe de $f'(x)$.

$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} = (1 - 2x)e^{-2x}$.

Pour tout réel x , $e^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$

a le même signe que $1 - 2x$.

$1 - 2x \geq 0$ équivaut à $-2x \geq -1$

et donc à $x \leq \frac{-1}{-2}$, soit $x \leq 0,5$.

On en déduit le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$0,5e^{-1}$	0

144 Partie A

1. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• Pour tout réel x , $f'(x) = 2xe^{x^2}$.

Pour tout réel x , $e^{x^2} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $2x$.

Sur $]-\infty ; 0]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur cet intervalle.

Sur $[0 ; +\infty[$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur cet intervalle.

• $f(0) = e^0 = 1$.

2. a. Pour tout réel x , $h'(x) = 2xe^{x^2} - 2x = 2x(e^{x^2} - 1)$.

b. Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$ donc $e^{x^2} \geq 1$ et par suite, $e^{x^2} - 1 \geq 0$.

$h'(x)$ a donc le même signe que $2x$.

Sur $]-\infty ; 0]$, $h'(x) \leq 0$ et sur $[0 ; +\infty[$, $h'(x) \geq 0$.

c. $h(0) = e^0 - 0^2 - 1 = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Pour tout réel x , $h(x) \geq 0$, donc $e^{x^2} \geq x^2 + 1$.

Partie B

1. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, $e^{x^2} \geq x^2 + 1$ donc $\frac{e^{x^2}}{x} \geq x + \frac{1}{x}$, soit $g(x) \geq x + \frac{1}{x}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{x}) = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

3. a. Pour tout réel $x < 0$, $e^{x^2} \geq x^2 + 1$ donc $\frac{e^{x^2}}{x} \leq x + \frac{1}{x}$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \frac{1}{x}) = -\infty$ donc par comparaison $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

4. a. Pour tout réel x non nul, $g'(x) = \frac{2xe^{x^2} \times x - e^{x^2}}{x^2} = \frac{e^{x^2}(2x^2 - 1)}{x^2}$

Pour tout réel x non nul $e^{x^2} > 0$ et $x^2 > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 1$.

b.

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{2}e^{0,5}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	