

Capacité 7 p 173

Utiliser les théorèmes de comparaison

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x , $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

2. a. Calculer la limite de f en $+\infty$. b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

N°104 p 183

104 Capacité 7, p. 173

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2 \sin(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x , $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

N°108 p 183

108 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x , on a : $1 \leq f(x) \leq 2$.

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0[$ par $g(x) = \frac{2f(x) + 1}{x}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 0[$,

$$\frac{5}{x} \leq g(x) \leq \frac{3}{x}.$$

2. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en 0.

Capacité 10 p 175

Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer pour tout réel x , $f'(x)$.

2. Calculer la limite de f en $-\infty$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Capacité 8 p 167

Utiliser les croissances comparées de x^n et e^x

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - xe^x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x}$

N°110 à 117 p 183

Pour les exercices 110 à 117, calculer les limites données.

110 Capacité 8, p. 173

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x e^x + 2e^x - 1)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^2x - x^3e^x)$

111 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4e^x}{x}\right)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^x}{2x^2}\right)$

112 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4e^x}{\sqrt{x}}\right)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}e^x}{x}\right)$

113 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{e^x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x}{e^x}$

Piste : Faire apparaître $\frac{e^x}{x}$.

114 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 1)e^x$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 3)e^x$

115 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - e^x)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2e^x)$

116 a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - xe^x)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x)e^x$

117 a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3xe^{3x})$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^{2-x}$

Capacité 10 p 175

Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer pour tout réel x , $f'(x)$.

2. Calculer la limite de f en $-\infty$.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$.

Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

4. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

N°144 p 185

144 RAISONNER = CALCULER

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$.

Partie A

1. Justifier chaque donnée du tableau de variation de la fonction f ci-dessous.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $\nearrow$	$+\infty$

2. On veut montrer que pour tout réel x , $e^{x^2} \geq x^2 + 1$.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$.

a. Démontrer que pour tout réel x , $h'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Vérifier que $h(0) = 0$, puis conclure quant à la question posée.

Partie B

1. Calculer les limites de g en 0 à gauche et à droite.

2. Utiliser le résultat démontré dans la partie A pour calculer la limite de g en $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout réel $x < 0$, $g(x) \leq x + \frac{1}{x}$.

b. En déduire la limite de g en $-\infty$.

4. a. Montrer que pour tout réel x non nul, $g'(x)$ a le même signe que $2x^2 - 1$.

b. Dresser le tableau de variation de g .

