

Capacité 1 p 203

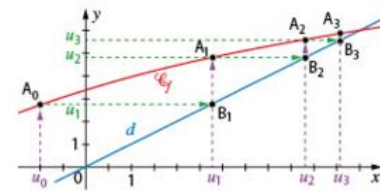
Solution commentée

- 1 Il y a un « saut » pour la courbe $\mathcal{C}_f$ au niveau du point abscisse 2 : f n'est donc pas continue en 2.
- 2 Il n'y a pas « de saut » pour la courbe $\mathcal{C}_f$ au niveau du point abscisse -1, la fonction f est donc continue en -1.

Capacité 2 p 203

Solution commentée

- 1 On construit le point A_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 , puis le point B_1 de d ayant même ordonnée que A_0 . L'abscisse de B_1 est u_1 . On poursuit le processus jusqu'à obtenir u_3 .
- 2 Pour tout réel x de $[-2; +\infty[$, $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0$; ainsi f est croissante sur $[-2; +\infty[$.
- 3 Pour tout naturel n , soit $P(n)$, la propriété : « $-2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$ ».
- Initialisation : $u_0 = -1$ et $u_1 = 4$ donc $-2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$: $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit k un naturel fixé tel que $P(k)$ est vraie. On va prouver que $P(k+1)$ est vraie. Puisque $-2 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 6$ et f est croissante sur $[-2; +\infty[$, on a : $f(-2) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(6)$ or $f(-2) = 2$ et $f(6) = 6$, donc $-2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 6$. $P(k+1)$ est vraie.
- La propriété est initialisée, héréditaire, donc vraie pour tout naturel n . La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 6.
- 4 La suite (u_n) est croissante majorée donc elle converge vers un réel L . La fonction f est continue sur $[-2; +\infty[$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ donc L vérifie $L = f(L)$. L'équation $f(x) = x$ équivaut à $2\sqrt{x+3} = x$. Si x est négatif, l'équation n'a pas de solution. Pour x positif, puisque chaque membre est positif, $f(x) = x$ équivaut à $4(x+3) = x^2$, ce qui équivaut à $x^2 - 4x - 12 = 0$. Cette équation a pour solutions -2 et 6, et 6 est la seule solution positive, donc $L = 6$.



N°45 p 214

- 45 1. On lit que $f(1) = 3$, or $f(1) = 1^2 + b \times 1 + 2 = b + 3$ donc $b = 0$.
2. f n'est pas continue en tout point de $[-3; 4]$, car discontinue en 1. $f(1) = b + 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \times 1 + 1 = 4$. On doit avoir $b + 3 = 4$ soit $b = 1$.

N°51 p 214

- 51 1. a. Réponse vraie.
b. Réponse fausse.
c. Réponse fausse.
C'est donc la réponse a.
2. a. Réponse fausse.
b. Réponse fausse.
c. Réponse vraie.
C'est donc la réponse c.

Capacité 3 p 205

Solution commentée

- 1 La fonction f est continue car f est une fonction polynôme. De plus $f(0) = 1$ et $f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 1 = -1$ donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. On déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$.
- 2 a. On calcule la dérivée de f : $f'(x) = 3x^2 - 3$ pour tout x de $[0; +\infty[$. Pour tout x tel que $x > 1$, on a $x^2 > 1^2$ car la fonction carré est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. On déduit donc que pour tout x tel que $x > 1$, $3x^2 > 3$ soit $3x^2 - 3 > 0$. Comme $f'(x)$ est strictement positif pour tout x de $]1; +\infty[$, on en déduit que f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.
- b. Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1$ et $f(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 3$. 0 appartient à l'intervalle $[-1; 3]$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

Capacité 4 p 205

Solution commentée

- 1 α est compris entre 1 et 2 puisque $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$. Avec la calculatrice, on obtient un tableau des valeurs $f(x)$ pour x variant de 1 à 2 avec un pas de 0,1. On détermine ainsi un encadrement de α d'amplitude 0,1 : $1,5 < \alpha < 1,6$. On obtient ensuite un tableau des valeurs $f(x)$ pour x variant de 1,5 à 1,6 avec un pas de 0,01 et donc un encadrement de α d'amplitude 0,01 : $1,53 < \alpha < 1,54$.
- 2 On peut « faire tourner » l'algorithme en s'aidant d'un tableau.

X	Y1	X	Y1
1.1	-0.969	1.5	-0.125
1.2	-0.872	1.51	-0.087
1.3	-0.703	1.52	-0.048
1.4	-0.456	1.53	-0.008
1.5	-0.125	1.54	0.0323
1.6	0.296	1.55	0.0739
1.7	0.813	1.56	0.1164
1.8	1.432	1.57	0.1599
1.9	2.159	1.58	0.2043
2	3	1.59	0.2497
		1.6	0.296

$\alpha \approx 1.5$

Étapes	m	f(a)	f(m)	f(a) × f(m)	a	b	b - a	Condition : b - a ≥ 0,1
Entrée					1	2	1	Vraie
1	1,5	-1	-0,125	positif	1,5	2	0,5	Vraie
2	1,75	-0,125	1,1094	négatif	1,5	1,75	0,25	Vraie
3	1,625	-0,125	0,416	négatif	1,5	1,625	0,125	Vraie
4	1,5625	-0,125	0,1272	négatif	1,5	1,5625	0,0625	Fausse

En fin d'algorithme on a : $a = 1,5$ et $b = 1,5625$.

N° 53 p 215

- 53 $f(x) = x^3 - 6x + 1$.
1. $f(-2) = 5$: $f(-2) > 0$ et $f(2) = -3$: $f(2) < 0$: f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution.
2. a. Pour tout réel x : $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2)$.
Si $x > 2$ alors $x^2 > 4$ donc $x^2 - 2 > 0$ et $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.
b. f est continue strictement croissante sur $[2; +\infty[$, $f(2) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $[2; +\infty[$.

N° 56 p 215

- 56 1. Pour tout réel x : $f(x) = e^{4x+7} + x^3 - 10$ puis $f'(x) = 4e^{4x+7} + 3x^2$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ or $0 \in]-\infty; +\infty[$, f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3. $-1,14 < \alpha < -1,13$.

N° 59 p 215

N° 61 p 216

59 Un fichier logiciel est disponible dans le manuel numérique enseignant.

1. Pour tout réel x de $[0 ; 4]$: $f(x) = x^3 + 3\sqrt{x} - 5$ puis pour tout réel x de $]0 ; 4]$,

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} \text{ donc } f'(x) > 0 : f \text{ est strictement croissante sur } [0 ; 4].$$

2. $f(0) = -5$ et $f(4) = 65$ donc 0 est compris entre $f(0)$ et $f(4)$: f est continue, strictement croissante sur $[0 ; 4]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans $[0 ; 4]$.

3. a. Dans la cellule A3, on peut taper =A2+SCS2 .

b. Dans la cellule B2, on peut taper $\text{=A2^3+3*RACINE(A2)-5}$.

4. $f(1,19) < 0$ et $f(1,20) > 0$ donc $1,19 < \alpha < 1,20$.

61 Des programmes Python (ordinateur, Casio, NumWorks ou Texas) sont disponibles dans le manuel numérique enseignant.

1. Pour tout réel x : $f(x) = x^3 + x^2 - 5$ puis $f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$.

Sur $[1 ; 2]$, $x > 0$ et $3x + 2 > 0$ donc $f'(x) > 0$: ainsi f est strictement croissante sur $[1 ; 2]$, continue : 0 est compris entre $f(1) = -3$ et $f(2) = 7$ donc selon le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[1 ; 2]$.

2.a. L'appel sol(3) renvoie un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{2^3} = 0,125$.

b. L'appel sol(4) renvoie un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{2^4} = 0,0625$.

Sujet D p 231

Sujet D

A. 1. a. Pour tout réel x de $[0 ; 10]$, $f(x) = \frac{1}{e^{-0,6} + e^{4,5-x}}$ puis $f'(x) = \frac{e^{4,5-x}}{(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^2}$.

b. Pour tout réel x de $[0 ; 10]$, $f''(x) = \frac{-e^{4,5-x}(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^2 - e^{4,5-x}(-2e^{4,5-x})(e^{-0,6} + e^{4,5-x})}{(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^4}$

$$\text{puis } f''(x) = e^{4,5-x} \times \frac{-e^{-0,6} - e^{4,5-x} + 2e^{4,5-x}}{(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^3} \text{ puis } f''(x) = e^{4,5-x} \times \frac{e^{4,5-x} - e^{-0,6}}{(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^3}.$$

2. a. $e^{4,5-x} - e^{-0,6} \geq 0$ équivaut à $e^{4,5-x} \geq e^{-0,6}$ équivaut à $4,5 - x \geq -0,6$ équivaut à $x \leq \frac{51}{10}$.

b. Pour tout réel x de $[0 ; 10]$, $e^{4,5-x} > 0$ et $(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^3 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $e^{4,5-x} - e^{-0,6}$. Donc sur $[0 ; 5,1]$, $f''(x) \geq 0$ et sur $[5,1 ; 10]$, $f''(x) \leq 0$.

3. La dérivée seconde s'annule en changeant de signe pour $x = 5,1$ donc la courbe de f possède un point d'inflexion I d'abscisse $x = 5,1$ et d'ordonnée $y \approx 0,91$.

4. Sur $[5,1 ; 10]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave.

B. 1. a. $f(10) = \frac{1}{e^{-0,6} + e^{-5,5}}$ soit $f(10) \approx 1,81$.

b. Pour tout réel x de $[0 ; 10]$, $f'(x) = \frac{e^{4,5-x}}{(e^{-0,6} + e^{4,5-x})^2}$ donc $f'(x) \geq 0$ ainsi f est croissante sur $[0 ; 10]$. Ainsi, pour tout réel x de $[0 ; 10]$ on a $f(x) \leq f(10)$, c'est à dire $f(x) \leq 2$.

Selon ce modèle, jusqu'en 2150, la température terrestre ne dépassera pas de plus de 2 °C la température de l'année 1900. L'objectif de l'accord de Paris serait respecté.

2. a. L'abscisse du point d'inflexion I est 5,1 ; $5,1 \times 25 = 127,5$ donc cela correspond à l'année 2028 (en arrondissant à l'unité).

b. $f(5,1) = \frac{1}{2} \times e^{0,6}$ soit $f(5,1) \approx 0,9$. L'année correspondant à l'abscisse du point I, la température a augmenté de 0,9 °C par rapport à la température de l'année de référence.

3. a. L'affirmation est fausse. La fonction f est croissante sur $[0 ; 10]$, donc après 2030 (année correspondant à l'abscisse 5,2), la température terrestre augmentera.

b. La vitesse du réchauffement climatique est modélisée par f' .

Sur $[5,1 ; 10]$, $f''(x) \leq 0$ donc f' est décroissante donc après 2030 (année correspondant à l'abscisse 5,2), la vitesse du réchauffement climatique diminuera bien. L'affirmation est vraie.

4. On résout graphiquement l'inéquation $f(x) \leq 1,5$, on trouve environ que $x \leq 6,6$.

Puis $6,6 \times 25 = 165$. C'est donc à partir de l'année 2065, que la température terrestre dépassera de plus de 1,5 °C la température de l'année de référence.