

III Correction

1 Limites sans indétermination

$$1. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -3 = -3 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 3 = +\infty.$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 6x^2 + 1 = -\infty.$$

$$3. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = 0.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

$$4. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} + \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+5) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+3)^5 = -\infty.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+3) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x+3)^5 = +\infty.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (4-2x) = -\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4-2x)^2 = +\infty.$$

$$8. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -5 = -5 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2-1) = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

$$9. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2} -3x = -6 \\ \lim_{x \rightarrow 2} + = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 1 = -1.$$

$$10. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \leq 2} -3 = -3 \\ \lim_{x \leq 2} 2-x = 0^+ \\ \lim_{x \leq 2} + = 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \leq 2} \frac{-3}{\sqrt{2-x}} = -\infty.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

[Retour](#)

$$11. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \nearrow 1} 2x - 3 = -1 \\ \lim_{x \nearrow 1} x - 1 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \nearrow 1} \frac{2x - 3}{x - 1} = +\infty.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

$$12. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \searrow 1} 2x - 3 = -1 \\ \lim_{x \searrow 1} x - 1 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \searrow 1} \frac{2x - 3}{x - 1} = -\infty.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

$$13. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \searrow -2} 5 = 5 \\ \lim_{x \searrow -2} 4 - x^2 = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \searrow -2} \frac{5}{4 - x^2} = -\infty.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

$$14. \left. \begin{array}{l} \lim_{x \nearrow -2} 5 = 5 \\ \lim_{x \nearrow -2} 4 - x^2 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \nearrow -2} \frac{5}{4 - x^2} = +\infty.$$

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

[Retour](#)

2 Limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle

1. Première méthode :

$$f(x) = x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right).$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = 1, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Deuxième méthode :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

2. Première méthode :

$$f(x) = \frac{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{1}{x}}.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Deuxième méthode :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$ en $-\infty$.

Remarque : La deuxième méthode étant plus rapide, j'utiliserais dorénavant celle-ci dans les calculs. Mais attention :

- Cette méthode ne s'applique qu'en $+\infty$ ou $-\infty$.
- Cette méthode ne s'applique pas lorsque l'on a des fonctions racines, trigonométriques, logarithmes ...

[Retour](#)

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty.$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty.$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0.$
 $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 2x^4}{x^2(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2 = -2.$
 $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$.
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x + 1)^2}{(2x - 3)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2}{8x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{8x} = 0.$
 $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

[Retour](#)

3 Limites indéterminées

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geq -1$, donc $x + \sin x \geq x - 1$.
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x = +\infty$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc si $x > 0$, on a : $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$.
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
3. Pour tout $x > 1$, $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 1} = \frac{(\sqrt{x - 3} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1})}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1}} = \frac{(x - 3) - (x + 1)}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1}} = \frac{-4}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1}}$.
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - 3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1} = +\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 1}} = 0$
4. Rappel : si f est dérivable en a alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
 La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable en 0 et sa dérivée est : $x \mapsto -\sin x$,
 donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 1} = -\sin 0 = 0$.
5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x + 1}$ est dérivable en 0 et sa dérivée est : $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{0 + 1}}{x - 0} = \frac{1}{2\sqrt{0 + 1}} = \frac{1}{2}$.
6. Pour $x > 0$, $\sqrt{x^2 - 1} - 2x = \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} - 2x = \sqrt{x^2} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2x = x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2 \right)$.
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 2 \right) = -1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - 2x = -\infty$.

7. Ici x est négatif, donc $\sqrt{x^2} = -x$.

$$\text{Pour } x < 0, \sqrt{2x^2 - 5} + 2x = \sqrt{x^2 \left(2 - \frac{5}{x^2}\right)} + 2x = -x\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}} + 2x = x \left(-\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}} + 2\right).$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}} + 2\right) = -\sqrt{2} + 2 > 0$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

8. 3 annule le numérateur et le dénominateur, donc il sont tous les deux factorisables par $x - 3$.

$$\text{Pour tout } x \neq 3, \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+1}{x+3}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x+3} = \frac{7}{6}.$$

9. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction cosinus, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1.$$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \leq 1$, donc $4 + \sin x \leq 5$ donc $\frac{1}{4 + \sin x} \geq \frac{3x - 5}{5}$ et $\frac{3x - 5}{4 + \sin x} \geq \frac{1}{5}$.

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{5} = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{4 + \sin x} = +\infty.$$

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1$, donc $x^2 - 5 \cos x \geq x^2 - 5$, or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5 \cos x = +\infty$.

[Retour](#)

4 Asymptotes obliques

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$,

$$f(x) - (2x - 1) = \frac{2x^3 - x^2 - 8x + 7 - (2x - 1)(x^2 - 4)}{x^2 - 4} = \frac{3}{x^2 - 4}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$ et la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

(b) J'étudie le signe de $f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x^2 - 4}$.

$x^2 - 4$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -2 et 2 .

Donc :

- $\frac{3}{x^2 - 4}$ est positif et la courbe est au dessus de son asymptote sur $] -\infty; -2[\cup]2; +\infty[$
 - $\frac{3}{x^2 - 4}$ est négatif et la courbe est en dessous de son asymptote sur $] -2; 2[$.
- (Les intervalles sont ouverts, car ce sont des valeurs qui annulent le dénominateur.)

2. (a) Pour tout $x \neq -2$, $ax+b+\frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$.

J'identifie les coefficients du numérateur avec ceux de $\frac{x^2-x-3}{x+2}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -1 \\ 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ donc } f(x) = x - 3 + \frac{3}{x+2}.$$

(b) $f(x) = x - 3 + \frac{3}{x+2}$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+2} = 0$ donc $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = x - 3$ comme asymptote en $-\infty$.

3. $f(x) - (x-2) = \sqrt{x^2-4x} - (x-2) = \frac{(\sqrt{x^2-4x} - (x-2))(\sqrt{x^2-4x} + (x-2))}{\sqrt{x^2-4x} + (x-2)} = \frac{-4}{\sqrt{x^2-4x} + (x-2)}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 - \frac{4}{x}} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2-4x} + (x-2)} = 0$.

Donc la droite d'équation $y = x - 2$ est bien asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$

4. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ à la courbe.

(b) L'écart entre deux courbes est donnée par la valeur absolue de la différence, donc je résous

$$\begin{aligned} |f(x) - x| &\leq 10^{-2} \\ \Leftrightarrow \left| \frac{4}{x^2} \right| &\leq 10^{-2} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} &\leq 10^{-2} \\ \Leftrightarrow \frac{4}{x^2} &\geq 400 \\ \Leftrightarrow x &\in]-\infty; -20] \cup [20; +\infty[. \end{aligned}$$

[Retour](#)