

I Exercices

1 Limites sans indétermination

Calculer les limites des fonctions suivantes, et préciser lorsque la courbe représentative de f (notée $(\mathcal{C}_f)$) admet une asymptote horizontale ou verticale.

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $+\infty$.
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ en $-\infty$.
3. $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ en $+\infty$.
4. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x}$ en $+\infty$.
5. $f(x) = (-x+3)^5$ en $+\infty$.
6. $f(x) = (-x+3)^5$ en $-\infty$.
7. $f(x) = (4-2x)^2$ en $+\infty$.
8. $f(x) = -5\sqrt{x^2-1}$ en $-\infty$.
9. $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en 2.
10. $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{2-x}}$ en 2 par valeurs inférieures.
11. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ en 1 par valeurs inférieures.
12. $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ en 1 par valeurs supérieures.
13. $f(x) = \frac{5}{4-x^2}$ en -2 par valeurs inférieures.
14. $f(x) = \frac{5}{4-x^2}$ en -2 par valeurs supérieures.

Réponses

2 Limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle

Calculer les limites des fonctions suivantes, et préciser lorsque la courbe représentative de f (notée $(\mathcal{C}_f)$) admet une asymptote horizontale.

1. $f(x) = x^3 - 2x + 3$, en $+\infty$.
2. $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ en $-\infty$.
3. $f(x) = x^4 + x$ en $-\infty$.
4. $f(x) = \frac{x^2-2}{2x+3}$ en $-\infty$.
5. $f(x) = \frac{2x-5}{x+x^2}$ en $+\infty$.
6. $f(x) = \frac{4-2x^4}{x^2(x+1)^2}$ en $-\infty$.
7. $f(x) = \frac{(3x+1)^2}{(2x-3)^3}$ en $+\infty$.

Aide

Réponses

3 Limites indéterminées

Pour chaque limite il faut trouver la bonne méthode. C'est difficile au début, puis avec l'expérience ...

Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin x.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}.$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} - \sqrt{x+1}.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}.$
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - 2x.$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 5} + 2x.$
8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 9}.$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{4 + \sin x}.$
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 5 \cos x.$

[Aide](#)
[Réponses](#)

4 Asymptotes obliques

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ par : $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4}$, et on appelle $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
 - (a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.
 - (b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et de (Δ) .
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x + 2}$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe.
 - (a) Déterminer des réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$.
 - (b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote en $-\infty$ et donner l'équation de cette asymptote.
3. On donne la fonction f définie sur $] - \infty; 0] \cup [4; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$.
Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$
4. (a) Montrer que la courbe représentative de la fonction g , définie par $g(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$.
(b) Déterminer sur quel ensemble l'écart entre la courbe et l'asymptote est inférieur à un centième d'unité.

[Aide](#)
[Réponses](#)

II Aide

2 Limite en l'infini d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle

Première méthode :

Je mets le terme de plus haut degré en facteur, je simplifie dans le cas d'une fraction, puis je calcule la limite.

Deuxième méthode :

J'applique une des règles suivantes :

- La limite en l'infini d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

[Retour](#)

3 Limites indéterminées

Quelques méthodes pour lever une indétermination :

- Les règles de comparaison de fonctions : inégalités, théorème des gendarmes.
Utilisation possible : limites en l'infini d'une fonction trigo.
- L'expression conjuguée.
Utilisation possible : limites avec des sommes ou des différences contenant des racines.
- Retour à la définition du nombre dérivé.
Utilisation possible : limites d'un quotient en un point. (avec éventuellement des différences au numérateur et au dénominateur)
- Factorisation.
Utilisation possible : limites en l'infini avec des racines, ou limites en un point de fractions.

Aide spécifique à chaque question :

1. Comparaison.
2. Comparaison (gendarmes).
3. Expression conjuguée.
4. Nombre dérivé.
5. Nombre dérivé ou expression conjuguée.
6. Factorisation.
7. Factorisation. Attention, si $x < 0$, $\sqrt{x^2} \neq x$.
8. Factorisation.
9. Nombre dérivé.
10. Comparaison.
11. Comparaison.

[Retour](#)

4 Asymptotes obliques

Rappel de cours :

Soit f une fonction et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- La droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ ssi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

- La droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ ssi il existe une fonction φ telle que :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

(La fonction φ représente l'écart entre la courbe et la droite.)

Même chose si je remplace $+\infty$ par $-\infty$.

Méthodes :

- Si dans le texte on me donne l'équation de l'asymptote, alors je simplifie l'expression de $f(x) - (ax + b)$, puis je calcule la limite.
- Si on ne me donne pas l'équation, j'essaie de reconnaître la forme $ax + b + \varphi(x)$.
- Pour déterminer les positions relatives, j'étudie le signe de la différence :
 $f(x) - (ax + b)$.

[Retour](#)