

Exercice 1 : (points)

$$) \ v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \frac{6-2u_n}{u_n}$$

$$v_{n+1} = 3 \left(1 - \frac{2}{u_n} \right) \text{ donc } v_{n+1} = 3v_n$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison

$q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1-v_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$

3) Soit P_n la propriété : « $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$ pour n entier naturel.

Initialisation : pour $n = 0$ on a $u_0 = \frac{2}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n fixé, on suppose que P_n est vraie c'est-à-dire : $u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}$

On veut prouver que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{n+1} = \frac{2}{1+3^{n+2}}$.

$$\text{On sait que } u_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n} = \frac{\frac{2}{1+3^{n+1}}}{3-\frac{2}{1+3^{n+1}}} = \frac{\frac{2}{1+3^{n+1}}}{\frac{1+3^{n+2}}{1+3^{n+1}}} = \frac{2}{1+3^{n+1}} \times \frac{1+3^{n+1}}{(1+3^{n+2})} = \frac{2}{1+3^{n+2}}$$

P_n est héréditaire.

Conclusion : P_n est initialisée, elle est héréditaire donc d'après le principe de récurrence P_n est vraie pour tout n entier naturel.

4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+3^{n+1}) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$; par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
Car 3 supérieur à 1