

correction

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1. a. Calculer u_1 et u_2 .

$$u_1 = \frac{1}{5}u_0^2 = \frac{16}{5} \text{ et } u_2 = \frac{1}{5}u_1^2 = \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2}{5} = \frac{256}{125}$$

- b. Compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée `suite_u` et prend pour paramètre l'entier naturel p . Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n) .

```
def suite_u(p):
    u=4
    for i in range(1,p+1):
        u=u*u/5
    return(u)
```

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 4$.

Pour tout entier n , soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0 < u_n \leq 4$.

- **Initialisation** $u_0 = 4$ et $0 < 4 \leq 4$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** On suppose qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à-dire $0 < u_n \leq 4$ (hypothèse de récurrence), démontrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie c'est à dire $0 < u_{n+1} \leq 4$
Par hypothèse de récurrence : $0 < u_n \leq 4$
La fonction carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc
 $0 < u_n^2 \leq 16$
En multipliant par $\frac{1}{5} > 0$ on obtient :
 $0 < \frac{1}{5}u_n^2 \leq \frac{16}{5}$ Or $\frac{16}{5} = 3,2 \leq 4$ donc
 $0 < \frac{1}{5}u_n^2 \leq 4$, c'est-à-dire
 $0 < u_{n+1} \leq 4$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion** La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel.
On a donc démontré que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n \leq 4$.

- b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n^2 - u_n = u_n \left(\frac{u_n}{5} - 1 \right) = u_n \left(\frac{u_n - 5}{5} \right)$$

$u_n \leq 4$ donc $u_n - 5 < 0$; or $u_n > 0$ donc $u_n(u_n - 5) < 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n
On en conclut que la suite (u_n) est décroissante.

- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Pour tout n , $0 < u_n$ donc la suite (u_n) est minorée par 0.

La suite (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. a. Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$; par unicité de la limite
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}u_n^2 = \frac{1}{5}\ell^2$; par opération sur les limites
- Pour tout n , on a : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$. Donc $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$

b. En déduire la valeur de ℓ .

ℓ est solution de l'équation $x = \frac{1}{5}x^2$; on résout cette équation.

$$x = \frac{1}{5}x^2 \iff x \left(1 - \frac{1}{5}x\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 5$$

Or, pour tout n , on a : $0 < u_n \leq 4$ donc ℓ vérifie $0 \leq \ell \leq 4$. La solution $\ell = 5$ n'est donc pas valable donc $\ell = 0$.